Mårten Wadenbäck

Differentialekvationer: inledning + separabla

En differentialekvation (DE) är en ekvation som innehåller en okänd funktion och någon/några av dess derivator. Vi skall endast studera så kallat ordinära DE, där den okända funktionen endast beror av en enda variabel. Ordningen av den högsta förekommande derivatan anger ekvationens ordning.

Exempel: $x^2 \sin y + y'\sqrt{y} = e^{-x}$ är en DE av ordning ett i den okända funktionen $y = y(x)$, eftersom högsta förekommande derivatan är y'.

När vi har bestämt primitiver kan man säga att vi löst DE av typen $y' = f(x)$, som ju har lösningar $y(x) = F(x) + C$, där F är en primitiv till f och C är en godtycklig konstant.

Betraktar vi ekvationen $y'' = f(x)$ ser vi att

$$y'' = f(x) \Leftrightarrow y' = F(x) + C \Leftrightarrow y = E(x) + Cx + D,$$

där E är en primitiv till F, F är en primitiv till f, och C och D är godtyckliga konstanter.

I allmänhet gäller

Påstående: Allmänna lösningen till en ordinär DE av ordning n innehåller n godtyckliga (med vissa förbehåll) konstanter.

Definition: En DE som kan skrivas som $g(y)y' = f(x)$ kallas separabel.

En separabel DE går att omvandla till en "vanlig" ekvation i den obekanta funktionen y genom att ta en primitiv till vardera sida i DE:

$$g(y)y' = f(x) \Leftrightarrow \int g(y(x))\,y'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

där $\int g(y(x))y'(x)dx = \begin{bmatrix} y = y(x) \\ dy = y'(x)dx \end{bmatrix} = \int g(y)dy$, så

$$G(y) = F(x) + C.$$

Exempel: Bestäm lösningen till $y^2y'=e^x$ så att $y(0)=3$.

Vi integrerar båda sidor med avseende på x:

$$\int y^2y'\,dx=\int e^x\,dx \Leftrightarrow \frac{y^3}{3}=e^x+C \Leftrightarrow$$

$$y^3=3e^x+3C \Leftrightarrow y(x)=\sqrt[3]{3e^x+3C}.$$

Konstanten bestämmer vi genom $y(0)=3=\sqrt[3]{3+3C} \Leftrightarrow$ $27=3+3C \Leftrightarrow 3C=24 \Leftrightarrow C=8$. Den sökta lösningen är alltså $y(x)=\sqrt[3]{3e^x+24}$.

Exempel: Beståndet av någon viss djurart kan ibland beskrivas av differentialekvationen

$$y'=ky\left(1-\frac{y}{L}\right),$$

där k är en konstant som har med fertilitet och dödlighet att göra, och $L>0$ beskriver habitatets kapacitet med avseende på föda, revir, osv. Om $y\neq 0$ och $y\neq L$ kan vi skriva ekvationen på vår standardform:

$$y'=ky\left(1-\frac{y}{L}\right) \Leftrightarrow Ly'=ky(L-y) \Leftrightarrow \frac{Ly'}{y(L-y)}=k.$$

Vi tar nu fram en primitiv med avseende

på tiden t i bägge led:

$$\int \frac{Ly'}{y(L-y)}\,dt = \int k\,dt \iff \int \frac{L\,dy}{y(L-y)} = kt + C.$$

Vi partialbråksuppdelar, $\frac{L}{y(L-y)} = \frac{A}{L-y} + \frac{B}{y} = \frac{Ay + B(L-y)}{y(L-y)}$,

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ BL = L \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 1, \end{cases}$$

så

$$kt + C = \int \frac{L\,dy}{y(L-y)} = \int \left(\frac{1}{L-y} + \frac{1}{y}\right) dy = -\ln|L-y| + \ln|y| = \ln\left|\frac{y}{L-y}\right|.$$

Om $0 < y < L$ gäller alltså

$$\ln\left(\frac{y}{L-y}\right) = kt + C \iff \frac{y}{L-y} = e^{kt+C} = \underbrace{e^{C}}_{M} \cdot e^{kt} \iff$$

$$y = LMe^{kt} - yMe^{kt} \iff y(1 + Me^{kt}) = LMe^{kt} \iff$$

$$y(t) = \frac{LMe^{kt}}{1 + Me^{kt}}.$$

Observera även de konstanta lösningarna till den ursprungliga ekvationen! Vi ser att om $y'(x) = 0$ kan $y(x) = 0$ eller $y(x) = L$.

Dessa beskriver "jämvikt" för populationen.

Exempel: Newtons avsvalningslag säger att avsvalningshastigheten hos en (liten) kropp är proportionell mot temperaturdifferensen mellan kroppen och omgivningen, dvs

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0),$$

där $T(t)$ är kroppens temperatur, $k>0$ är en materialkonstant som beskriver värmeövergången till omgivningen, och T_0 är omgivningens temperatur.

Om $T(t) = T_0$ är systemet i balans, och ingenting händer (detta är en lösning). Om däremot $T(t) \neq T_0$ kan vi dela med $T - T_0$ och få en DE på vår standardform för separabla DE:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-T_0) \Leftrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)-T_0} = -k \quad \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{T'(t)}{T(t)-T_0}\,dt = \begin{bmatrix} T = T(t) \\ dT = T'(t)dt \end{bmatrix} = \int \frac{dT}{T-T_0} = \ln|T-T_0| = -kt + C$$

och vi har en "vanlig" ekvation för den okända temperaturfunktionen $T(t)$.

Om $T(t) > T_0$ får vi

$$T(t) - T_0 = e^{-kt+C} = \underbrace{e^C}_{M} \cdot e^{-kt} = Me^{-kt} \Leftrightarrow T(t) = T_0 + Me^{-kt},$$

där M är temperaturskillnaden vid tiden $t=0$.

Om istället $T(t) < T_0$ får vi

$$T_0 - T(t) = Me^{-kt} \Leftrightarrow T(t) = T_0 - Me^{-kt}.$$