Mårten Wadenbäck

Lineära differentialekvationer av första ordningen

En första ordningens (eller gradens) DE kan alltid skrivas på formen $L(y, y', x) = h(x)$, där L är en funktion (egentligen en operator) som beror av y, y' och x.

Definition: En DE av typen $L(y, y', x) = h(x)$ är linjär om L är lineär i y och y', dvs om

(i) $L(u+v, u'+v', x) = L(u, u', x) + L(v, v', x)$, och

(ii) $L(ku, ku', x) = kL(u, u', x)$ för konstanter k.

Exempel: Vilka av följande DE är lineära?

a) $\dfrac{dy}{dx} + y = 1$ b) $\sqrt{y'} = x - \sin x$

c) $3x^2y' + yx^3 = e^{-x}$ d) $y^2y' + e^{-y} = -\cos(2x)$

I a) är $L(y, y', x) = y' + y$, så vi kontrollerar lätt

(i) $L(u+v, u'+v', x) = u'+v'+u+v = u'+u+v'+v =$
$= L(u, u', x) + L(v, v', x)$, och

(ii) $L(ku, ku', x) = ku' + ku = k(u' + u) = kL(u, u', x)$,

så L är linear vilhet gör ehvationen i a)

linear.

I b) fumhar varhen (i) eller (ii), exempelvis är

(ii) $L(2u, 2u', x) = \sqrt{2u'} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{u'} = \sqrt{2} L(u, u', x) \neq 2L(u, u', x)$,

så ehvationen (och L) är olinear(a).

I c) är $L(y, y', x) = 3x^2 y' + yx^3$; och både

(i) $L(u+v, u'+v', x) = 3x^2(u'+v') + (u+v)x^3 =$
$= 3x^2 u' + ux^3 + 3x^2 v' + vx^3 = L(u, u', x) + L(v, v', x)$

och

(ii) $L(ku, ku', x) = 3x^2 ku' + kux^3 = k(3x^2 u' + ux^3) =$
$= kL(u, u', x)$

gäller. Ehvationen är alltså linear.

I d) gäller varhen (i) eller (ii), så ehvationen

är inte linear (hontrollera själv!).

När vi nu han hänna igen lineära första ordningens DE

är det dags att försöha lösa dem. Som förberedelse

till det honstaterar vi att

$$\frac{d}{dx}\left(e^{G(x)} y(x)\right) = e^{G(x)} y'(x) + e^{G(x)} G'(x) y(x).$$

Detta innebär att vi kan lösa alla DE på formen

$$e^{G(x)}y'(x)+e^{G(x)}G'(x)y(x)=S(x),$$

eftersom

$$e^{G(x)}y'(x)+e^{G(x)}G'(x)y(x)=S(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{G(x)}y(x)\right)=S(x) \Leftrightarrow$$

$$e^{G(x)}y(x)=\int S(x)dx \Leftrightarrow$$

$$y(x)=e^{-G(x)}\int S(x)dx.$$

Sats (Integrerande faktor): Varje linjär DE av ordning ett kan skrivas på formen

$$\frac{d}{dx}\left(e^{G(x)}y(x)\right)=S(t)$$

för något val av <u>integrerande faktor</u> $e^{G(x)}$.

Bevis: Det räcker att betrakta ekvationer av typen $y'+a(x)y=h(x)$. Om vi sätter $G(x)=\int a(x)dx$ och multiplicerar båda led med $e^{G(x)}$ får vi

$$\underbrace{e^{G(x)}y'+e^{G(x)}a(x)y}_{\frac{d}{dx}\left(e^{G(x)}y(x)\right)}=\underbrace{e^{G(x)}h(x)}_{S(x)}.$$

Exempel: Bestäm allmänna lösningen till

$$\frac{dy}{dx} - x^2 y = x^2.$$

Vi plockar fram integrerande faktorn:

$$G(x) = \int -x^2 dx = -\frac{x^3}{3} + A, \qquad \text{(vi kan ta } A=0\text{)}$$

$$I.F = e^{-\frac{x^3}{3}}.$$

Multiplikation med denna följt av integration ger

$$e^{-x^3/3} y'(x) - e^{-x^3/3} \cdot x^2 y(x) = e^{-x^3/3} \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^3/3} y(x)\right) = e^{-x^3/3} \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{-x^3/3} y(x) = \int e^{-x^3/3} \cdot x^2 dx \quad \Leftrightarrow$$

$$y(x) = e^{x^3/3} \int e^{-x^3/3} x^2 dx = \begin{bmatrix} u = \frac{x^3}{3} \\ du = x^2 dx \end{bmatrix} = e^u \int e^{-u} du =$$

$$= e^u(-e^{-u} + C) = Ce^u - 1 = Ce^{x^3/3} - 1.$$

Allmänna lösningen är alltså $y(x) = Ce^{x^3/3} - 1$.

Exempel: Om $N(t)$ anger mängden av ett visst radioaktivt ämne gäller $N'(t) = -kN(t) \Leftrightarrow$ $N'(t) + kN(t) = 0$, som är en linjär DE av ordning ett.

Integrerande faktor blir $I.F = e^{kt}$, och vi har

$$N'(t)+kN(t)=0 \Leftrightarrow e^{kt}N'(t)+e^{kt}kN(t)=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}(e^{kt}N(t))=0 \Leftrightarrow e^{kt}N(t)=C \Leftrightarrow N(t)=Ce^{-kt}.$$

Om det vid tiden $t=0$ fanns mängden C av ämnet finns det alltså vid tiden t $N(t)=Ce^{-kt}$ kvar av ämnet.

Exempel: Bestäm allmänna lösningen till $y'+\frac{y}{x}=1$ då $x>0$.

Vi konstaterar att ekvationen är linjär, och börjar därför med att ta fram integrerande faktorn: $G(x)=\int\frac{dx}{x}=\ln x$, (då $x>0$)

så $I.F = e^{\ln x}=x$.

Multiplikation med I.F ger

$$y'+\frac{y}{x}=1 \Leftrightarrow \underbrace{(xy'+y=x)}_{\text{onödigt steg}} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\underset{\uparrow\ \text{I.F}}{x}\,y)=x \Leftrightarrow$$

$$xy=\int x\,dx \Leftrightarrow y(x)=\frac{1}{x}\int x\,dx=\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=\frac{x}{2}+\frac{C}{x}.$$

Allmänna lösningen är alltså $y(x)=\frac{x}{2}+\frac{C}{x}$.