Mårten Wadenbäck

Lineära differentialekvationer av ordning två

Vi behandlar här endast ekvationer med konstanta koefficienter. Vi börjar med homogena ekvationer, dvs ekvationer där högerledet är noll, av typen

$$Ay'' + By' + Cy = 0$$

för konstanter A, B, och C. Om $A=0$ är det inte en andra ordningens DE, så vi kan antaga att $A \neq 0$. Om $C=0$ kan vi integrera båda sidor och få en första ordningens lineär DE, så vi fokuserar på fallet då även $C \neq 0$. Genom att dela bort A kan vi förutsätta att ekvationen är

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad \text{där } b \neq 0.$$

Vi skall finna alla lösningar genom att göra variabelbytet $y(x) = z(x)e^{rx}$ (där $r \neq 0$).

Detta ger

$$y'(x) = z'(x)e^{rx} + rz(x)e^{rx} = e^{rx}(z'(x) + rz(x))$$

och

$$y''(x) = z''(x)e^{rx} + rz'(x)e^{rx} + rz'(x)e^{rx} + r^2 z(x)e^{rx} =$$

$$= e^{rx}(z''(x) + 2rz'(x) + r^2 z(x)).$$

Insättning i vår ursprungliga DE ger

$$e^{rx}(\underbrace{z''(x)+2rz'(x)+r^2z(x)}_{\text{från } y''} + \underbrace{az'(x)+arz(x)}_{\text{från } ay'} + \underbrace{bz(x)}_{\text{från } by}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$z''(x) + (2r+a)z'(x) + (r^2+ar+b)z(x) = 0,$$

dvs en ny DE i den okända funktionen $z(x)$.

Låt nu $r = r_1$ vara en rot till <u>karakteristiska ekvationen</u> $r^2+ar+b=0$. Då kan två fall inträffa:

(i) Ekvationen har en dubbelrot $r = r_1$. Då är

$$r^2+ar+b = (r-r_1)^2 = r^2 - 2r_1 r + r_1^2, \quad \text{så } a = -2r_1.$$

DE:n i z blir då bara $z''(x) = 0 \Leftrightarrow z'(x) = C_1 \Leftrightarrow$

$z(x) = C_1 x + C_2 \Leftrightarrow y(x) = (C_1 x + C_2)e^{r_1 x}$.

(ii) Ekvationen har två olika rötter r_1 och r_2.

Då är $r^2+ar+b = (r-r_1)(r-r_2) = r^2 - (r_1+r_2)r + r_1 r_2$,

så $a = -r_1 - r_2$. Låt exempelvis $r = r_1$.

Nu blir $z''(x)+(r_1-r_2)z'(x)=0 \Leftrightarrow z'(x)+(r_1-r_2)z(x)=M$.

Denna löser vi med integrerande faktorn, som

är $I.F = e^{(r_1-r_2)x}$: $\quad z'(x)+(r_1-r_2)z(x)=M \Leftrightarrow$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{(r_1-r_2)x}z(x)\right)=e^{(r_1-r_2)x}M \Leftrightarrow e^{(r_1-r_2)x}z(x)=\underbrace{\frac{M}{r_1-r_2}}_{C_1}e^{(r_1-r_2)x}+C_2$$

$$\Leftrightarrow z(x)=C_1+C_2e^{-(r_1-r_2)x} \Leftrightarrow y(x)=e^{r_1x}(C_1+C_2e^{-(r_1-r_2)x})=$$
$$=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}.$$

Vi sammanfattar detta som en sats.

Sats: DE:n $y''+ay'+by=0$ har den allmänna lösningen

(i) $y(x)=(C_1x+C_2)e^{r_1x}$ om den karakteristiska ekvationen har dubbelroten $r=r_1$,

(ii) $y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ om r_1 och r_2 är olika lösningar till karakteristiska ekvationen.

Exempel: Enligt satsen finner vi allmänna lösningen till $y''+y'-2y=0$ genom att lösa karakteristiska ekvationen, $r^2+r-2=0 \Leftrightarrow r=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-(-2)}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$.

Lösningen är $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$ för några konstanter C_1 och C_2, eftersom rötterna är skilda.

Exempel: Lös DE:n $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Vi hittar rötterna till karakteristiska ekvationen

$r^2 + 6r + 9 = 0 \Leftrightarrow r = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3$. Eftersom vi har

en dubbelrot ges lösningarna till vår DE

av $y(x) = (C_1 x + C_2)e^{-3x}$.

Man kan lägga på olika krav på lösningen för att

bestämma konstanterna.

Exempel: Bestäm en lösning till $y'' + 4y' - 5y = 0$ som

är begränsad för $x > 0$ och som har $y'(0) = -1$.

Allmänna lösningen får vi som vanligt genom

att lösa karakteristiska ekvationen,

$$r^2 + 4r - 5 = 0 \Leftrightarrow r = -2 \pm \sqrt{4-(-5)} = -2 \pm 3,$$

så $y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{x}$.

Om $C_2 \neq 0$ kommer $y(x)$ att vara obegränsad, så

C_2 måste vara noll, och $y(x) = C_1 e^{-5x}$. Detta ger

$y'(x) = -5C_1 e^{-5x}$ och alltså $y'(0) = -5C_1 = -1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{1}{5}$.

Den sökta lösningen är $y(x) = \frac{1}{5} e^{-5x}$.

Vi undersöker nu ickehomogena ekvationer, dvs ekvationer av typen $y''+ay'+by=h(x)$ där $h(x)$ inte behöver vara noll. Om vi kan hitta någon lösning $y_p(x)$, en så kallad partikulärlösning, får vi allmänna lösningen som $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$, där $y_h(x)$ löser den homogena ekvationen $y''+ay'+by=0$.

Sätter vi in $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$ i vår ursprungliga DE får vi

$$y_h''(x)+y_p''(x)+a(y_h'(x)+y_p'(x))+b(y_h(x)+y_p(x))=$$
$$=\underbrace{y_h''+ay_h'+by_h}_{=0}+\underbrace{y_p''+ay_p'+by_p}_{=h(x)}=h(x).$$

Det finns mer eller mindre intelligenta sätt att hitta partikulärlösningar, men vi nöjer oss med fall där vi kan göra en enkel ansats.

Exempel: Bestäm allmänna lösningen till $y''+y'-y=x^2$.

Vi delar upp problemet i två ekvationer, där vi söker alla lösningar till $y_h''+y_h'+y_h=0$ och någon lösning till $y_p''+y_p'+y_p=x^2$.

Den homogena lösningen, $y_h(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$, bestämde vi i ett tidigare exempel.

Eftersom högerledet $h(x)$ är ett andragrads-polynom, testar vi att ansätta $y_p(x)$ som ett andragradspolynom $y_p(x)=Ax^2+Bx+C$.

Detta ger $y_p'(x)=2Ax+B$ och $y_p''(x)=2A$, så insatt i DE:n blir det $\underbrace{2A}_{y_p''(x)}+\underbrace{2Ax+B}_{y_p'(x)}-2\underbrace{(Ax^2+Bx+C)}_{y_p(x)}=x^2$.

Identifikation av koefficienter ger

$$\begin{cases} -2A=1 \\ 2A-2B=0 \\ 2A+B-2C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=-\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Vi har alltså $y_p(x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$, och alla lösningar ges då av $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$.

Exempel: Hitta en partikulärlösning till $y''+y'-2y=e^{-x}$.

Vi testar med att ansätta en liknande exponential-funktion som vi har i högerledet, dvs vi ansätter $y_p(x)=Ae^{-x}$.

Vi får då $y_p'(x) = -Ae^{-x}$ och $y_p''(x) = Ae^{-x}$, och insatt i ekvationen får vi

$$\cancel{Ae^{-x}} - \cancel{Ae^{-x}} - 2Ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow -2A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}.$$

En partikulärlösning är alltså $y_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$.

Exempel: Hitta en partikulärlösning till $y'' + y' - 2y = e^x$.

Här fungerar det inte att ansätta $y_p(x) = Ae^x$, eftersom det hade givit oss $y_p'(x) = Ae^x$, $y_p''(x) = Ae^x$, och

$$\underbrace{Ae^x}_{y_p''} + \underbrace{Ae^x}_{y_p'} - 2\underbrace{Ae^x}_{y_p} = e^x \Leftrightarrow 0 = e^x,$$

som inte går. Problemet är att $r = 1$ är en lösning till karakteristiska ekvationen, så $y_p(x) = Ae^x$ löser den homogena ekvationen!

Vi kan istället testa att ansätta ett polynom gånger e^x, eftersom alla derivator då kommer att innehålla en faktor e^x som kan delas bort.

Vi testar med $y_p(x) = Axe^x$, som ger $y_p'(x) = Ae^x + Axe^x$

och $y_p''(x) = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x$. Insättning ger

$$\underbrace{2Ae^x + Axe^x}_{y_p''} + \underbrace{Ae^x + Axe^x}_{y_p'} - 2\underbrace{Axe^x}_{y_p} = e^x \Leftrightarrow$$

$$2A + Ax + A + Ax - 2Ax = 1 \Leftrightarrow 3A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Som partikulärlösning duger alltså $y_p(x) = \frac{1}{3}xe^x$.