Mårten Wadenbäck

Komplexa hjälpmetoder

Vi börjar med att titta på den komplexa exponentialfunktionen. Vi nöjer oss med $f(x)=e^{wx}$, där $w\in\mathbb{C}$ och $x\in\mathbb{R}$. Om $w=\alpha+i\beta$ så är

$$f(x)=e^{wx}=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x)).$$

Deriverar vi f med avseende på x får vi

$$f'(x)=\alpha e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x))+e^{\alpha x}(-\beta\sin(\beta x)+i\beta\cos(\beta x))=$$

$$=\alpha e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}+\beta e^{\alpha x}(i\cdot i\sin(\beta x)+i\cos(\beta x))=$$

$$=\alpha e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}+i\beta e^{\alpha x}\underbrace{(i\sin(\beta x)+\cos(\beta x))}_{e^{i\beta x}}=$$

$$=\alpha e^{wx}+i\beta e^{wx}=we^{wx},$$

så derivatan fungerar på samma sätt som om w hade varit reellt.

Exempel: Bestäm allmänna lösningen till $y''+2y'+2y=0$.

Vi löser karakteristiska ekvationen,

$$r^2+2r+2=0 \iff r=-1\pm\sqrt{1-2}=-1\pm i.$$

Rötterna är skilda, så allmänna lösningen ges av $y(x) = C_1 e^{(-1-i)x} + C_2 e^{(-1+i)x}$. Om vi är intresserade av reella lösningar är den här formen olämplig, eftersom alla val av C_1 och C_2 inte ger reella lösningar.

Vi skriver om lösningen som

$$y(x) = C_1 e^{(-1-i)x} + C_2 e^{(-1+i)x} =$$

$$= C_1 e^{-x}(\cos x - i \sin x) + C_2 e^{-x}(\cos x + i \sin x) =$$

$$= e^{-x}(C_1 \cos x - i C_1 \sin x + C_2 \cos x + i C_2 \sin x) =$$

$$= e^{-x}\big(\underbrace{(C_1 + C_2)}_{A} \cos x + \underbrace{i(C_2 - C_1)}_{B} \sin x\big) =$$

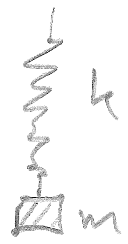
$$= e^{-x}(A \cos x + B \sin x).$$

Nu ger alla reella värden på konstanterna A och B reella funktioner.

I allmänhet gäller

Sats: Om karakteristiska ekvationen har lösningarna $r = \alpha \pm i\beta$ för $\beta \neq 0$ så ges lösningarna till motsvarande homogena DE av $y(x) = e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$.

Exempel: Antag att en tyngd med massan m är fäst i en fjäder med fjäderkonstant k, och låt $y(t)$ vara avvikelsen från jämviktsläget. Fjädern kommer att påverka massan med en kraft $-ky(t)$ (minus för att den vill tillbaka till jämvikt). Samtidigt kopplar Newtons andra lag ihop kraften på massan med dess acceleration enligt $F = ma = my''(t)$.



Alltså har vi följande DE som beskriver massans läge:

$$my'' + ky = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{k}{m}y = 0.$$

Om vi drar ut massan till $y = 1$ och släpper vid tiden $t = 0$, hur kommer massan då att svänga?

Karakteristiska ekvationen är $r^2 + \frac{k}{m} = 0$, och vi har de komplexa rötterna $r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Med beteckningen $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ blir allmänna

lösningen till DE:n $y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

Begynnelsevillkoren $y(0)=1$ (där den släpptes)

och $y'(0)=0$ (släpptes i vila) ger

$$1 = y(0) = A$$

och

$$y'(t) = -\omega \sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = y'(0) = \omega B \quad \Rightarrow B = 0.$$

Den sökta lösningen är alltså $y(t) = \cos(\omega t)$.

Exempel: Finn en partikulärlösning till $y'' + y' - 2y = \sin(3x)$.

Här är $\sin(3x) = \mathrm{Im}\{e^{3ix}\}$. En idé är att

lösa en <u>komplex hjälpekvation</u>, $z'' + z' - 2z = e^{3ix}$,

och ta $y(x) = \mathrm{Im}\{z(x)\}$. Som ansats för

partikulärlösningen $z_p(x)$ tar vi $z_p(x) = Ae^{3ix}$

för någon komplex konstant A. Vi får

$$z_p'(x) = 3iAe^{3ix} \quad \text{och} \quad z_p''(x) = -9Ae^{3ix}.$$

Insättning ger

$$-9A\cancel{e^{3ix}} + 3iA\cancel{e^{3ix}} - 2A\cancel{e^{3ix}} = e^{3ix} \Leftrightarrow$$

$$(-11+3i)A = 1 \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{1}{-11+3i} = \frac{-11-3i}{(-11+3i)(-11-3i)} = -\frac{11+3i}{121+9} = -\frac{11+3i}{130},$$

Så $z_p(x) = -\frac{11+3i}{130}e^{3ix} = -\frac{11+3i}{130}(\cos(3x) + i\sin(3x)) =$

$$= -\frac{11}{130}\cos(3x) - \frac{11i}{130}\sin(3x) - \frac{3i}{130}\cos(3x) + \frac{3}{130}\sin(3x).$$

Ur detta får vi $y_p(x) = \operatorname{Im}\{z_p(x)\} = \frac{3}{130}\cos(3x) - \frac{11}{130}\sin(3x).$

För säkerhets skull kontrollerar vi lösningen:

$$\begin{cases} y_p(x) = -\frac{3}{130}\cos(3x) - \frac{11}{130}\sin(3x) \\ y_p'(x) = \frac{9}{130}\sin(3x) - \frac{33}{130}\cos(3x) \\ y_p''(x) = \frac{27}{130}\cos(3x) + \frac{99}{130}\sin(3x) \end{cases} \quad \text{ger}$$

$$\frac{27}{130}\cos(3x) + \frac{99}{130}\sin(3x) + \frac{9}{130}\sin(3x) - \frac{33}{130}\cos(3x) + \frac{6}{130}\cos(3x) + \frac{22}{130}\sin(3x) =$$

$$= \frac{27-33+6}{130}\cos(3x) + \frac{99+9+22}{130}\sin(3x) = \sin(3x).$$

Anmärkning: Observera att både sin(3x) och cos(3x) behövs i partikulärlösningen, trots att högerledet endast innehöll sin(3x). Vill man ansätta en lösning istället för att gå via komplexa hjälpekvationen måste man ansätta

$$y_p(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x).$$

Komplexa metoder är användbara i andra sammanhang med exponentialfunktioner och sinus och cosinus.

Exempel: Bestäm $\int e^{-x}\sin(2x)\,dx$.

Här kan vi partialintegrera två gånger och få tillbaka samma integral igen.

En annan idé är att göra på följande sätt:

$$\int e^{-x}\sin(2x)\,dx = \int \operatorname{Im}\{e^{(-1+2i)x}\}\,dx = \operatorname{Im}\left\{\int e^{(-1+2i)x}\,dx\right\} =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{-1+2i}e^{(-1+2i)x}\right\} + C = \operatorname{Im}\left\{\frac{-1-2i}{1^2+2^2}e^{-x}(\cos(2x)+i\sin(2x))\right\} + C =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{-\frac{1}{5}e^{-x}\cos(2x) - \frac{i}{5}e^{-x}\sin(2x) - \frac{2i}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\sin(2x)\right\} + C =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{5}\sin(2x) - \frac{2e^{-x}}{5}\cos(2x) + C.$$