Mårten Wadenbäck

Repetition av kursen

En <u>talföljd</u> är en oändlig följd av tal och skrivs ofta $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Om vi har en formel som ger tal nr n i följden, $a_n = f(n)$, kan vi skriva $(f(n))_{n=1}^{\infty}$.

Om $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar (ändligt) sägs följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara <u>konvergent</u>, annars är den <u>divergent</u>.

En talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kallas för en

(i) <u>aritmetisk talföljd</u> om $a_{k+1} - a_k = d$ (konstant) för alla k.

(ii) <u>geometrisk talföljd</u> om $\frac{a_{k+1}}{a_k} = q$ (konstant) för alla k.

Exempel: Följden som ges av $a_n = 5n - 3$ för $n \geq 1$ är en aritmetisk talföljd, eftersom

$a_{k+1} - a_k = (5(k+1)-3) - (5k-3) = 5$ för alla k.

Eftersom $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ är följden divergent.

I en aritmetisk talföljd kommer $a_n = a_1 + (n-1)d$, och i en geometrisk talföljd kommer $a_n = a_1 q^{n-1}$.

<u>Summasymbolen</u> Σ, fungerar på följande sätt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Här kallas k för <u>summationsindex</u>, och är den variabel som termerna skall bero av.

Summor uppfyller <u>linearitet</u>:

(i) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} c a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k$ för konstanta c.

Sats (Aritmetisk summa): Om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en aritmetisk talföljd så är

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}.$$

Sats (Geometrisk summa): Om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en geometrisk talföljd så är

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} n a_1 & \text{om } q = 1 \\ a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{om } q \neq 1. \end{cases}$$

För utsagor som beror på ett naturligt tal n gäller <u>induktionsprincipen</u>:

Om

(i) $U(1)$ är sann (<u>basfallet</u>), och

(ii) $U(k) \Rightarrow U(k+1)$ för alla $k \in \mathbb{N}$ (<u>induktionssteget</u>),

så är $U(n)$ sann för alla $n \in \mathbb{N}$.

Exempel: Visa att $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Vi inför ett vänsterled $VL(n) = 1^3+2^3+\ldots+n^3$ och ett högerled $HL(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, och utsaga nr n är nu $U(n)$: $VL(n) = HL(n)$.

För $n=1$ har vi $VL(1) = 1^3 = 1$ och $HL(1) = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$, så basfallet $U(1)$ är sant.

Antag nu att $U(p)$ är sann för något p. Då är

$$VL(p+1) = \underbrace{1^3+2^3+\ldots+p^3}_{=VL(p)} + (p+1)^3 = VL(p) + (p+1)^3 =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{eftersom} \\ VL(p) = HL(p) \end{bmatrix} = HL(p) + (p+1)^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3 =$$

$$= (p+1)^2\left(\frac{p^2}{4} + p + 1\right) = (p+1)^2 \cdot \frac{p^2+4p+4}{4} = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4} = HL(p+1),$$

så även $U(p+1)$ är sann. Induktionsprincipen ger nu att $U(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$, dvs att $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

En "summa av oändligt många termer" dvs $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kallas för en serie. En serie är konvergent och har summan s om

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s,$$

och är annars divergent. Ett krav för att en serie skall vara konvergent är att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, så om $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ är serien divergent.

Sats (Geometrisk serie): Den geometriska serien $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots$ (där $a_1 \neq 0$) är konvergent precis då $-1 < q < 1$ (dvs $|q| < 1$), och dess summa är då $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}$.

Definition: Antag att funktionen f är definierad på ett intervall I. Funktionen F sägs då vara en primitiv funktion till f på I om $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$.

Sats: Om både F och G är primitiver till f på I så är $G(x) = F(x) + C$ på I för någon konstant C.

Den <u>obestämda integralen</u> av f, $\int f(x)\,dx$, betecknar alla primitiva funktioner till f, så om $F(x)$ är en primitiv till $f(x)$ är $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

För obestämda integraler gäller <u>linearitet</u>, dvs

Sats: (i) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(ii) $\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$ om k är konstant.

Ur deriveringsreglerna följer genast ett antal <u>standard-integraler</u> (se föreläsning 5). Dessa kombineras ofta med räkneregeln

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C \qquad (\text{där } a \neq 0).$$

Ibland behöver vi "foga ihop" primitiver för olika intervall.

Exempel: Låt f vara given av

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{då } x \leq 1 \\ 2x & \text{då } 1 < x, \end{cases}$$

och bestäm $\int f(x)\,dx$.

Vi får $\int f(x)dx = \begin{cases} 2x + C_1 & \text{då } x \leq 1 \\ x^2 + C_2 & \text{då } 1 < x, \end{cases}$

men eftersom $\int f(x)dx$ är deriverbar är den

även kontinuerlig, så $\lim_{x \to 1^-} 2x + C_1 = \lim_{x \to 1^+} x^2 + C_2$.

Därför måste $C_2 = 1 + C_1$, och alltså $(C_1 = C)$

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} 2x + C & \text{då } x \leq 1 \\ x^2 + 1 + C & \text{då } 1 < x. \end{cases}$$

För att hantera primitiver till produkter, $f(x)g(x)$,

har vi nytta av <u>partialintegration</u>:

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx.$$

Exempel: Bestäm $\int (x^2+1)e^{2x}dx$.

Tar vi $f(x) = e^{2x}$ och $g(x) = x^2 + 1$ får vi

$$\int (x^2+1)e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}(x^2+1) - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 2x\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{ytterligare en} \\ \text{partialintegration} \end{bmatrix} = \frac{e^{2x}}{2}(x^2+1) - \left(\frac{e^{2x}}{2}x - \int \frac{e^{2x}}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}(x^2+1) - \frac{e^{2x}}{2}x + \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 3) + C.$$