Mårten Wadenbäck

Repetition av kursen, fortsättning

Kedjeregelns motsvarighet på integralform är

variabelsubstitution: $\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx.$

Exempel: Bestäm $\int \cos\sqrt{2t+3}\, dt.$

Vi har en sammansatt funktion som integrand, och den inre funktionen kan sägas vara $\sqrt{2t+3}$. Vi får

$$\int \cos\sqrt{2t+3}\, dt = \begin{bmatrix} u = \sqrt{2t+3} \\ t = \frac{u^2-3}{2} \\ dt = u\, du \end{bmatrix} = \int u \cos u\, du =$$

$$= [\text{partialintegration}] = u \sin u - \int \sin u\, du =$$

$$= u \sin u + \cos u + C = \sqrt{2t+3}\sin\sqrt{2t+3} + \cos\sqrt{2t+3} + C.$$

Rationella funktioner består av en kvot mellan två polynom, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Om $p(x)$ har högre (eller lika) grad än $q(x)$ är första steget för att beräkna $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ en polynomdivision, som ger oss $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \left(s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\right)dx$ för polynom $s(x)$ och $r(x)$ med $\text{grad}\, r(x) < \text{grad}\, q(x)$.

Givet att $r(x)$ har lägre grad än $q(x)$ beräknas $\int \frac{r(x)}{q(x)}dx$ med hjälp av partialbråksuppdelning.

Varje faktor $(x-a)^n$ i $q(x)$ ger upphov till följande partialbråk:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n},$$

och varje faktor $((x-a)^2+b^2)^n$ i $q(x)$ ger upphov till:

$$\frac{A_1x+B_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{A_2x+B_2}{((x-a)^2+b^2)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{((x-a)^2+b^2)^n}.$$

Metod:

Steg 1: få lägre grad i täljaren än i nämnaren

Steg 2: faktorisera nämnaren så långt det går

Steg 3: ansätt partialbråk och bestäm konstanter

Steg 4: bestäm primitiver till partialbråken.

Exempel: Bestäm $\int \frac{x^2+3}{x^4+x^2}\,dx$.

Täljaren har redan lägre grad än nämnaren, så vi slipper polynomdivision. Faktorisering av nämnaren ger $x^4+x^2 = x^2(x^2+1)$, så lämplig ansats för partialbråken är

$$\frac{x^2+3}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+1)},$$

och vi identifierar

$$\begin{array}{r} x^3: \\ x^2: \\ x: \\ \text{konstant:} \end{array} \begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 1 \\ A = 0 \\ B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 3 \\ C = 0 \\ D = -2. \end{cases}$$

Nu får vi

$$\int \frac{x^2+3}{x^4+x^2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^2+1}\right) dx = -\frac{3}{x} - 2\arctan x + C.$$

Kopplingen mellan primitiv funktion och area ges av

Sats (Areasatsen): Antag att $f(x) \geq 0$ är kontinuerlig i det öppna intervallet I, och antag vidare att $x_0, x \in I$ samt att $x \geq x_0$. Låt $A(x)$ vara arean som begränsas av x-axeln, $f(x)$, samt de vertikala linjerna genom x_0 respektive x. Då är $A'(x) = f(x)$ för $x \geq x_0$

Följdsats: Med samma förutsättningar gäller att arean mellan $x=a$ och $x=b$, under $y=f(x)$ och över $y=0$ (x-axeln), är $F(b)-F(a)$, där $F(x)$ är en godtycklig primitiv till f.

Definition: Antag att f är kontinuerlig på I, och att $a,b \in I$. Den <u>bestämda integralen</u> av f mellan a och b betecknas $\int_a^b f(x)\,dx$ och definieras att vara $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ för någon primitiv $F(x)$ till $f(x)$. Symbolen $\left[F(x)\right]_a^b$ kallas <u>insättningstecken</u> och definieras som $\left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$.

Exempel: Bestäm $\int_0^{\pi^2/4} \cos\sqrt{x}\,dx$.

Vi behöver göra ett variabelbyte och tänka på att gränserna ändras:

$$\int_0^{\pi^2/4} \cos\sqrt{x}\,dx = \begin{bmatrix} u=\sqrt{x} \\ x=u^2 \\ dx=2u\,du \end{bmatrix} = \int_0^{\pi/2} 2u\cos u\,du =$$

$$= \left[2u\sin u\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\sin u\,du =$$

$$= 2\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 \quad + \left[2\cos u\right]_0^{\pi/2} = \pi + 2\cdot 0 - 2\cdot 1 = \pi - 2.$$

Följdsats (till areasatsens följdsats): Om $f(x) \geq g(x)$ på $[a,b]$ så ges arean mellan kurvorna och mellan $x=a$ och $x=b$ av

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Bevisidé: Lägg till en konstant k till båda funktionerna så att de blir positiva, och använd areasatsens följdsats.

Exempel: Bestäm arean av det begränsade området som innesluts av kurvorna $y = 2x^2 - 2x - 3$ och $y = 4x - x^2 + 6$

Vi bestämmer först skärningspunkter, som ges av

$$2x^2 - 2x - 3 = 4x - x^2 + 6 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1-(-3)} = 1 \pm 2.$$

Alltså skall vi integrera från $x=-1$ till $x=3$. Vi kan sätta in $x=0$ för att se vilken av kurvorna som ligger överst på det intervallet, och vi ser att $y=4x-x^2+6$ är överst. Vi får nu

$$A=\int_{-1}^{3}\left((4x-x^2+6)-(2x^2-2x-3)\right)dx=\int_{-1}^{3}(-3x^2+6x+9)\,dx=$$

$$=\left[-x^3+3x^2+9x\right]_{-1}^{3}=(-27+27+27)-(1+3-9)=32.$$

Bestämda integraler kan användas för att beräkna

volym, massa, ...

Om kurvan $y=f(x)$ roteras kring x-axeln

uppstår en rotationskropp. Den del av denna

rotationskropp som ligger mellan $x=a$ och $x=b$

har volymen

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Exempel: Bestäm volymen av rotationskroppen

som bildas då $y=e^x$ roteras kring x-axeln,

mellan $x=0$ och $x=\ln 2$.

Volymformeln ger

$$V=\pi\int_0^{\ln 2}(e^x)^2\,dx=\pi\int_0^{\ln 2}e^{2x}\,dx=\pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\ln 2}=\pi\left(\frac{e^{2\ln 2}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}.$$