Bevisförslag

1. Formulera och bevisa formeln för aritmetisk summa.

Sats Om $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ är en aritmetisk talföljd, är summan av de n första termerna, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, given av $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

Bevis Kalla differensen, som är konstant, för d, så att $a_k = a_1 + (k-1)d$. Då är

$s_n = a_1 + (a_1+d) + \cdots + a_1 + (n-1)d$ och samtidigt

$s_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + a_n - (n-1)d$ så att

$s_n + s_n = (a_1+a_n) + (a_1+d+a_n-d) + \cdots + (a_1+(n-1)d + a_n - (n-1)d) =$

$= (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + \cdots + (a_1+a_n) = n \cdot (a_1+a_n)$ så

$$s_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} \qquad \square$$

Alternativt bevis Induktionsbevis för $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

(Naturligtvis är $n \geq 1$. Vi kallar den konstanta differensen för d.)

Basfall $n=1$ VL: $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$ HL: $\frac{1(a_1+a_1)}{2} = \frac{2a_1}{2} = a_1$. OK

I.A.: Antag, för något $p \geq 1$, att $\sum_{k=1}^{p} a_k = \frac{p(a_1+a_p)}{2}$.

Ind. steg: Visa att $\sum_{k=1}^{p+1} a_k = \frac{(p+1)(a_1+a_{p+1})}{2}$

Bevis: $VL = \sum_{k=1}^{p+1} a_k = a_1 + \cdots + a_p + a_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} a_k + a_{p+1}$

$$\overset{IA}{=} \frac{p(a_1+a_p)}{2} + a_{p+1} = \left\{ \begin{array}{l} a_p = a_1 + (p-1)d \\ a_{p+1} = a_1 + pd \end{array} \right\}$$

$$= \frac{p(a_1+a_1+(p-1)d)}{2} + a_1 + pd$$

$$= \frac{p(2a_1+pd-d)}{2} + a_1 + pd$$

$$= pa_1 + \frac{p^2d}{2} - \frac{pd}{2} + a_1 + pd = (p+1)a_1 + \frac{p^2d}{2} + \frac{pd}{2}$$

$$HL = \frac{(p+1)(a_1 + a_{p+1})}{2} = \{a_{p+1} = a_1 + pd\}$$

$$= \frac{(p+1)(a_1 + a_1 + pd)}{2} = \frac{(p+1)(2a_1+pd)}{2} = (p+1)\frac{2a_1}{2} + \frac{(p+1)pd}{2}$$

$$= (p+1)a_1 + \frac{p^2 d}{2} + \frac{pd}{2}$$

Så VL=HL, och tillsammans med basfallet ger detta enl. induktionsaxiomet att saken är sann. □

Anm Välj själv vilket bevis av dessa (eller andra) du föredrar.

2. Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa.

Sats Om $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ är en geometrisk talföljd med kvot q, så ges summan $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ av de n första termerna av

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{då } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{då } q = 1. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Anm } a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \text{ så } s_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{k-1}}$

Bevis Vi har

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} \quad \text{och därmed}$$

$$q \cdot s_n = \quad a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

Så $s_n - q s_n = a_1 + 0 + 0 + \dots + 0 - a_1 q^n$

och därför $(1-q)s_n = a_1(1-q^n)$

så, om $q=1$, fås $s_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Om $q=1$ är $s_n = a_1 + a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1^2 + \dots + a_1 \cdot 1^{n-1} =$

$= a_1 + a_1 + \dots + a_1 = n \cdot a_1$. □

Alternativt bevis Induktionsbevis för $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ då $q \neq 1$.

Basfall $n=1$: $VL = \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$

$HL = a_1 \frac{\cancel{1-q^1}}{\cancel{1-q}} = a_1$ ok.

I.A. Antag att $\sum_{k=1}^{p} a_k = a_1 \frac{1-q^p}{1-q}$ för något $p \geq 1$.

Ind. steg: Visa att $\sum_{k=1}^{p+1} a_k = a_1 \frac{1-q^{p+1}}{1-q}$.

Bevis: $\sum_{k=1}^{p+1} a_k = \sum_{k=1}^{p} a_k + a_{p+1} \overset{I.A.}{=} a_1 \frac{1-q^p}{1-q} + a_{p+1} =$

$a_{p+1} = a_1 \cdot q^p$

$= a_1 \frac{1-q^p}{1-q} + a_1 \cdot q^p = a_1 \left(\frac{1-q^p}{1-q} + q^p \right) =$

$= a_1 \left(\frac{1-q^p + q^p(1-q)}{1-q} \right) = a_1 \left(\frac{1-q^p + q^p - q^{p+1}}{1-q} \right)$

$= a_1 \left(\frac{1-q^{p+1}}{1-q} \right)$,

så ovan tillsammans med basfallet ger enl. induktionsprincipen att satsen är sann.

3. Den obestämda integralen $\int f(x)dx$ till en funktion f på ett intervall I är definierad som

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

där C är en godtycklig konstant, och F är en primitiv funktion till f på I, dvs uppfyller $F'(x) = f(x)$ på I.

4. Antag att F och G är primitiva funktioner till f;
då är $D(\underbrace{G(x) - F(x)}_{H(x)}) = D(G(x)) - D(F(x)) = f(x) - f(x) = 0$
Så $H'(x) = 0$, vilket ger $H(x) = C$, dvs $G(x) - F(x) = C$, C konstant.

5. Om F är en primitiv funktion till f, dvs $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$ och G är en primitiv funktion till g, dvs $\int g(x)\,dx = G(x) + C_2$

så: $D(F(x) + G(x)) = D(F(x)) + D(G(x)) = f(x) + g(x)$.

Därför är $F(x) + G(x)$ en primitiv funktion till $f(x) + g(x)$, så

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = F(x) + G(x) + C$$
$$= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

där konstanten inkluderats i integralen.

9. Produktregeln för derivering ger

$$D(F(x)g(x)) = F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x)$$
$$= f(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x)$$

där $F(x)$ antas vara primitiv funktion till $f(x)$. Per definition av obestämd integral, och enligt summaregeln, ger detta att

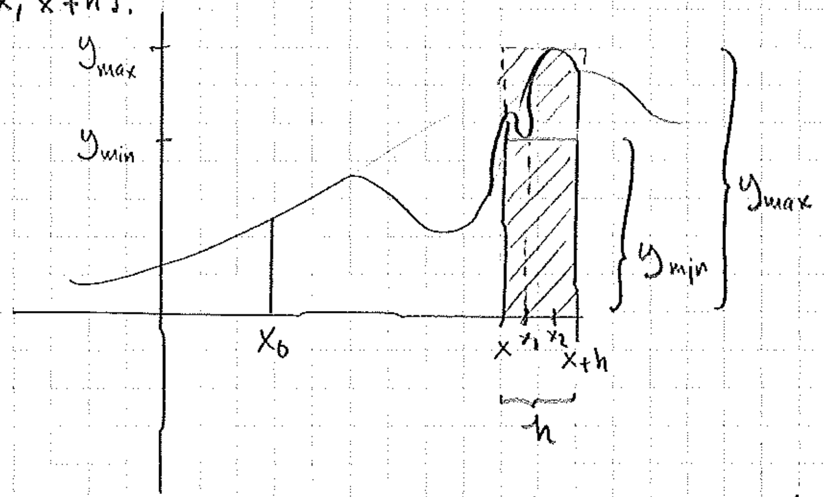
$$F(x)g(x) + C = \int (f(x)\,g(x) + F(x)g'(x))\,dx$$
$$= \int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx$$

så $$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx$$

där konstanten inkluderats i integralen.

6. <u>Areasatsen</u> Låt f vara en kontinuerlig funktion på ett öppet intervall I med $f(x) \geq 0$ på I. Låt x_0 och x vara punkter i I med $x_0 \leq x$, och beteckna med $A(x)$ arean av det område som begränsas av x-axeln, kurvan $y=f(x)$, och de vertikala linjerna vid x_0 och x. <u>Då</u> är $A'(x) = f(x)$.

<u>Bevis</u> Låt $h>0$ så att $x+h \in I$. Då f är kontinuerlig har f ett minsta värde y_{min} och ett största värde y_{max} på intervallet $[x, x+h]$.



Arean som begränsas av $y=f(x)$, x-axeln och de vertikala linjerna vid x och $x+h$ är $A(x+h)-A(x)$. Den uppfyller

$$h \cdot y_{min} \leq A(x+h) - A(x) \leq h \cdot y_{max}$$

ty den är begränsad mellan rektanglarna med höjd y_{min} och y_{max}. Då $h>0$ ger division att

$$y_{min} \leq \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq y_{max}$$

Då $h \to 0^+$ går y_{min} mot $f(x)$, ty $y_{min} = f(x_1)$ för något x_1, och $x_1 \to x$ då $h \to 0$, och f är kontinuerlig. På samma sätt går $y_{max} \to f(x)$ då $h \to 0$. Uttrycket $\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$ går mot $A'_+(x)$ enligt derivatans definition, så

$$\lim_{h\to 0} y_{min} \leq \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq \lim_{h\to 0} y_{max}$$

ger $\qquad f(x) \leq A'_+(x) \leq f(x)$, varur $A'_+(x) = f(x)$.

Om $h<0$ fås på motsvarande sätt

$$-h\cdot y_{min} \leq A(x) - A(x+h) \leq -h\cdot y_{max}$$

ty nu är h negativt, så rektanglarna har bas $(-h)>0$, och $x>x+h$. Division med det positiva talet $-h$ ger

$$y_{min} \leq \frac{A(x)-A(x+h)}{-h} \leq y_{max}$$

$$\Leftrightarrow y_{min} \leq \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq y_{max},$$

och samma resonemang som förr ger nu $A'_-(x) = f(x)$. Därmed är $A'(x) = f(x)$. □

7. Låt $F(x)$ vara en primitiv funktion till $f(x)$. Då gäller

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

och $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \cancel{F(c)} - F(a) + F(b) - \cancel{F(c)} = F(b) - F(a)$$

så $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$ (förutsatt att f är kontinuerlig på ett intervall där a,b och c ligger) □

8. Under förutsättning att f och g är kontinuerliga och $f(x)\geq g(x)$ i ett öppet intervall I som innehåller a och b med $a\leq b$, gäller

$$A = \int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx$$

där A är arean som begränsas av $y=f(x)$, $y=g(x)$ och de vertikala linjerna $x=a$ och $x=b$.

<u>Bevis</u> Funktionen g har ett minsta värde c i $[a,b]$ pga kontinuitet. Låt $k\in\mathbb{R}$ vara sådan att $k\geq |c|$. Då är $f(x)+k$ och $g(x)+k$ kontinuerliga med $f(x)+k \geq g(x)+k \geq 0$ på $[a,b]$. Arean A är differensen mellan arean under $y=f(x)+k$ och arean under $g(x)+k$ så ur areasatsen fås

$$A = \int_a^b (f(x)+k)\,dx - \int_a^b (g(x)+k)\,dx = \int_a^b (f(x)\cancel{+k} - g(x)\cancel{-k})\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx.$$ □

10. Givet diff.ekv.

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad (*)$$

och en primitiv funktion F till f, kan vi tillämpa produktregeln på $y \cdot e^{F(x)}$:

$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{F(x)}\right) = y' \cdot e^{F(x)} + y \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{F(x)}\right) =$$

$$= y' \cdot e^{F(x)} + y \cdot e^{F(x)} \cdot f(x) =$$

$$= e^{F(x)}\left(y' + yf(x)\right).$$

Enligt diff. ekv. $(*)$ är $y' + yf(x) = g(x)$, så vi får

$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{F(x)}\right) = e^{F(x)} g(x)$$

dvs

$$\int e^{F(x)} g(x)\,dx = y \cdot e^{F(x)} - C \qquad \text{(tecknet framför } C \text{ valt för framtida enkelhet)}$$

så

$$y e^{F(x)} = \int e^{F(x)} g(x)\,dx + C$$

dvs

$$y = \frac{1}{e^{F(x)}}\left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\right)$$

så

$$\boxed{y = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x)\,dx + Ce^{F(x)}} \qquad \square$$