Lösningar dugga, 2019-01-23.

Uppgift 1. Integrerande faktor: $e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}$

$$e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y = e^{-2x}e^{2x} = 1 \Leftrightarrow \left(e^{-2x}y\right)' = 1 \Leftrightarrow e^{-2x}y = x + C$$

$$y(x) = (x + C)e^{2x}$$
$$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$
$$y(x) = (x + 1)e^{2x}$$

Uppgift 2. Homogenlösning till $y'' + y = 0$: Karakt. ekv. $r^2 + 1 = 0$ med rötter $r_{1,2} = \pm i$ ger

$$y_h(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

Partikulärlösning till $y'' + y = e^x$: Ansätt $y_p(x) = Ae^x$. Insättning i ekvationen ger $A = \frac{1}{2}$ och $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$. Vi får

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \tfrac{1}{2}e^x + C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

Vi har

$$y'(x) = \tfrac{1}{2}e^x - C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$$

Randvillkor

$$y'(0) = \tfrac{1}{2} + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \tfrac{1}{2}, \;\; y(\pi) = \tfrac{1}{2}e^\pi - C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \tfrac{1}{2}e^\pi$$

$$y(x) = \tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{1}{2}e^\pi \cos(x) + \tfrac{1}{2}\sin(x)$$

Uppgift 3. Vi har $a = \frac{3}{4}, b = \frac{15}{4}$ och $f(x) = \sqrt{x}$ med $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ och får

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_a^b 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_a^b \sqrt{x + \tfrac{1}{4}}\,dx =$$

$$= 2\pi\tfrac{2}{3}\left[(x + \tfrac{1}{4})^{3/2}\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{15}{4}} = \frac{4\pi}{3}\left(4^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{4\pi}{3}(8 - 1) = \frac{28\pi}{3}$$