Lösningar övningsdugga.

Uppgift 1. Integrerande faktor: $e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}x \Leftrightarrow \left(e^{x^2}y\right)' = e^{x^2}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2}y = \int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$y(x) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{-x^2})$$

Uppgift 2. Homogenlösning till $y'' - 2y' + 2y = 0$: Karakt. ekv. $r^2 - 2r + 2 = 0$ med rötter $r_{1,2} = 1 \pm i$ ger

$$y_h(x) = e^x(C_1\cos(x) + C_2\sin(x))$$

Partikulärlösning till $y'' - 2y' + 2y = e^x$: Ansätt $y_p(x) = Ae^x$. Insättning i ekvationen ger $A = 1$ och $y_p(x) = e^x$. Vi får

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x(1 + C_1\cos(x) + C_2\sin(x)))$$

Randvillkor

$$y(0) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0, \quad y(\pi/2) = e^{\pi/2}(1 + C_2) = 0 \Rightarrow C_2 = -1$$

$$y(x) = e^x(1 - \sin(x))$$

Uppgift 3. Vi har $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ med $f'(x) = x^2$ och får

$$S = \int_1^2 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_1^2 2\pi\frac{1}{3}x^3\sqrt{1 + (x^2)^2}\,dx = \frac{2}{3}\pi\int_1^2 x^3\sqrt{1 + x^4}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{9}\left[(1 + x^4)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{\pi}{9}\left(17^{3/2} - 2^{3/2}\right) = \frac{\pi}{9}\left(17\sqrt{17} - 2\sqrt{2}\right)$$