MATEMATIK	Datum: 2014-10-29	Tid: eftermiddag
Chalmers	Hjälpmedel: inga. **Mobiltelefoner är förbjudna.**	
A.Heintz	Telefonvakt: Matteo Molteni	Tel.: 0703-088304

Lösningar till tenta i TMV036 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats.** Formulera och bevisa formeln för feltermen i linjär approximation. Kolla bevis i Adams. **(6p)**

2. **Kontinuitet.**

   i) Formulera definitionen på funktion kontinuerlig i en punkt.

   ii) Två funktioner f och g:

   $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}\exp(1+x)$ och $g(x) = x\ln(x^2)$ är båda odefinierade i punkten $x=0$.

   Bestäm om någon av dessa funktioner kan utvidgas till punkten $x = 0$ (d.v.s. om $f(0)$ eller $g(0)$ kan definieras i punkten $x = 0$) så att funktionen blir kontinuerlig i den punkten. I fall det är möjligt ange hur man kan göra det. **(6p)**

   Lösning.

   i) $f(x)$ är kontinuerlig i en punkt a om gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar och sammanfaller med värdet av f i den punkten: $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

   ii) Höger gränsvärde $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x^2}}{x}\exp(1+x) = e\left(\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}\right) = e$ och vänster gränsvärde $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{x^2}}{x} = e\left(\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}\right) = -e$ är olika. Detta medför att $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}\exp(1+x)$ existerar inte och funktionen f kan inte utvidgas till noll som kontinuerlig funktion.

   $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x\ln(x^2) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2)}{(1/x)} \overset{l'Hopital}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(2x/x^2)}{(-1/x^2)} = -\lim_{x\to 0}(-2x) = 0.$ Funktionen g har gränsvärde 0

   då $x \to 0$ och kan utvidgas till den punkten som kontinuerlig funktion med att sätta $g(0) = 0$.

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen:

   $$g(x) = x - \sqrt[3]{x+1}$$

   Bestäm punkter där funktionen är definierad, kontinuerlig, singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns. **(6p)**

   Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. **(4p)**

   Lösning.

   Funktionen är definierad och kontinuerlig för alla reella tal.

   $g'(x) = \frac{d}{dx}\left(x - \sqrt[3]{x+1}\right) = 1 - \frac{1}{3(x+1)^{2/3}}$

Punkten $x_1 = -1$ är en singulär punkt eftersom derivatan är odefinierad i den punkten. $g(-1) = -1$.

Grafen till g har vertikal tangent linje i punkten $x_1 = -1$ eftersom $\lim_{x\to -1+} g'(x) = \lim_{x\to -1-} g'(x) = -\infty$, eller $\lim_{x\to -1} g'(x) = -\infty$.

Kritiska punkter uppfyller ekvationen

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{3\left(x+1\right)^{2/3}} = 0$$

Vi löser ekvationen genom följande enkla transformationer:

$1 = \frac{1}{3(x+1)^{2/3}}; \implies (x+1)^{2/3} = \frac{1}{3}; \implies (x+1)^2 = \frac{1}{3^3}; \implies (x+1)^2 = \frac{1}{3^3}; \implies (x+1) = \pm\sqrt{\frac{1}{3^3}}; \implies x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{27}}$.

Punkterna $x_3 = -1 + \sqrt{\frac{1}{27}}$ och $x_2 = -1 - \sqrt{\frac{1}{27}}$ är kritiska punkter. Båda tal $x_2 < 0$ och $x_3 < 0$ eftersom $\sqrt{\frac{1}{27}} < 1$.

$g'(x) < 0$ för $x_2 < x < x_3$ och $g'(x) > 0$ för $x < x_2$ och $x_3 < x$. Detta medför att $f(x)$ har ett lokalt maximum i x_2 och ett lokalt minimum i x_3. Funktionen $f(x)$ är växande för $x < x_2$ och $x_3 < x$ och avtagande för $x_2 < x < x_3$.

$\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt[3]{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x+1}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x+1}\left(\frac{x^{2/3}}{\sqrt[3]{1+1/x}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x+1}\left(x^{2/3} - 1\right) = +\infty$

Likadant $\lim_{x\to-\infty} x - \sqrt[3]{x+1} = -\infty$. Detta medför att f har inget absolut maximum eller absolut minimum.

$g''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(x - \sqrt[3]{x+1}\right) = \frac{2}{9}\frac{1}{(x+1)^{5/3}}$

$g''(x) < 0$ för $x < -1$. $g''(x) > 0$ för $x > -1$. $g''(x)$ är odefinierad i singulär punkt $x_1 = -1$. Detta medför att

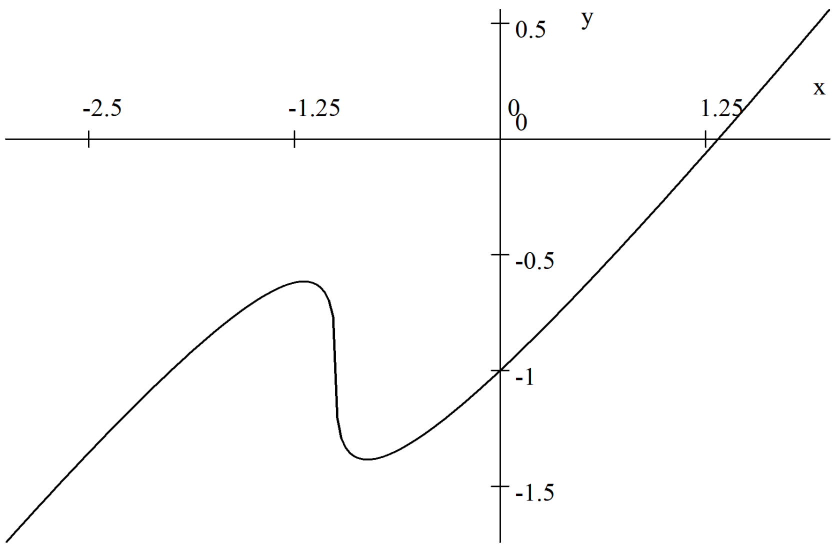
$g'(x)$ är avtagande funktion för $x < -1$ och f är konkav ner på det intervallet.

$g'(x)$ är avtagande funktion för $x > -1$ och f är konkav upp (convex) på det intervallet.

Grafen till g har vertikal tangent i punkten $x_1 = -1$ eftersom $\lim_{x\to -1} g'(x) = -\infty$.

Det betyder att x_1 är en böjningspunkt (inflection point).

Graf till funktionen. $g(0) = -1$;



4. **Linjär approximation.** Betrakta funktionen $f(x) = \sin(x)$ och dess linjär approximation för $x = 3/4\pi + 0,1$ och $a = 3/4\pi$. Uppskatta feltermen för approximationen och ange intervallet där värdet $\sin(3/4\pi + 0,1)$ måste ligga enligt dina uppskattningar. **(6p)**

   Lösning.

   $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

   $f(x) = L(x) + E(x)$

   $E(x) = \frac{1}{2}f''(s)(x - a)^2$ med s ett okänt tal mellan x och a.

   $f(a) = \sin(3/4\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f'(a) = \sin'(3/4\pi) = \cos(3/4\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin''(s) = -\sin(s)$; $x - a = 0,1$.

   $L(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}0,1 = \frac{\sqrt{2}}{2}0,9.$

   För s på intervallet $(3/4\pi, 3/4\pi + 0.1)$ är $\sin''(s) < 0$ och $\sin''(s) = -\sin(s)$ är växande funktion på det intervallet.

   $\min_{s\in[3/4\pi,3/4\pi+0.1]} (\sin''(s)) = -\sin(3/4\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

   Detta medför att $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin''(s) < 0$ för $s \in (3/4\pi, 3/4\pi + 0.1)$.

   Vi får en olikhet för feltermen $E(x) = \sin''(s)\frac{1}{2}(x-a)^2$ med att multiplicera den olikheten för $\sin''(s)$ med $\frac{1}{2}(x - a)^2 = \frac{1}{2}(0,1)^2 = 0,005$.

   $-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}(x - a)^2 < f''(s)\frac{1}{2}(x - a)^2 < 0$ eller $-\frac{\sqrt{2}}{2}0,005 < E(x) < 0.$

   Detta medför olikheten för $f(x) = L(x) + E(x)$:

   $\frac{\sqrt{2}}{2}0,9 - \frac{\sqrt{2}}{2}0,005 < \sin(3/4\pi + 0,1) < \frac{\sqrt{2}}{2}0,9$, eller $\frac{\sqrt{2}}{2}0,895 < \sin(3/4\pi + 0,1) < \frac{\sqrt{2}}{2}0,9.$

5. **Gränsvärden.** Beräkna gränsvärdet: $\lim_{x\to 0} (1 + \sin(x))^{1/x}$ **(6p)**

   Lösning.

   $\lim_{x\to 0} (1 + \sin(x))^{1/x} = \lim_{x\to 0} \exp(\ln(1 + \sin(x))\frac{1}{x})$

$\lim_{x\to 0} \ln(1+\sin(x))\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\sin(x) + O\left(\sin^2(x)\right)\right]\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{O\left(\sin^2(x)\right)}{x} = 1+0$ eftersom

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ och $\left|\frac{O\left(\sin^2(x)\right)}{x}\right| \le C\left|\frac{\sin(x)}{x}\sin(x)\right| \to 0$, då $x \to 0$.

Med l'Hopitals regel får vi samma svar ännu snabbare:

$\lim_{x\to 0} \ln(1+\sin(x))\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))} = 1$. Exponenten är kontinuerlig funktion. Detta medför att $\lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{1/x} = \lim_{x\to 0}\exp(\ln(1+\sin(x))\frac{1}{x}) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\ln(1+\sin(x))\frac{1}{x}\right) = \exp(1) = e$.

6. **Geometri i rummet.** Ange ekvationer på standart form för skärningslinjen av två plan givna med ekvationer $2x - 3y + z - 5 = 0$ och $3x + y - 2z - 4 = 0$. **(6p)**

Lösning.

Riktningsvektorn för linjen kan väljas som $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{N}_1 \times \overrightarrow{N}_2$ där $\overrightarrow{N}_1$ och $\overrightarrow{N}_2$ är normalvektorer till givna planen.

en punkt på skärningslinjen kan väljas med till exempel godtycklig $z = 1$. Systemet av ekvationer för x och y blir

$2x - 3y = 4$ och $3x + y = 6 \Longrightarrow 2x - 3y + 9x + 3y = 4 + 18 \Longrightarrow 11x = 22 \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow y = 0$.

En punkt på linjen är $P = (2, 0, 1)$. Allmän ekvation på kanonisk form för linjen ser ut som: $\frac{x-P_x}{V_x} = \frac{y-P_y}{V_y} = \frac{z-P_z}{V_z}$.

$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{N}_1 \times \overrightarrow{N}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 5i + 7j + 11k = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

Svar. Ekvationen för linjen är:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z-1}{11}.$$

7. **Geometri i rummet.** Bestäm skärningspunkten mellan planet $4x-7y+5z-20 = 0$ och linjen genom origo som med riktningsvektorn som utgör likadana vinklar med basvektorer i, j, k. **(4p)**

Lösning.

Riktningsvektorn $\overrightarrow{V}$ som utgör likadana vinklar med basvektorer i, j, k måste ha likadana komponenter till exempel 1:

$\overrightarrow{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, så parametrisk vektorekvation för linjen genom origo blir $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}$ med parametern t som antar alla reella värden. Vi sätter dessa uttryck för koordinater in i planets ekvation och får en ekvation för t.

$4t - 7t + 5t - 20 = 0$ eller $2t = 20$ och $t = 1$. Sökta skärningspunkten är $(10, 10, 10)$.

8. **Vektorer.** Bestäm vinkeln mellan vektorer $\overrightarrow{a}$ och $\overrightarrow{b}$ om vektorn $\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ är vinkelrät mot vektorn $7\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}$ och vektorn $\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$ är vinkelrät mot vektorn $7\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$. **(6p)**

   Lösning.

   Två vektorer är vinkelräta om och endast om deras skalärprodukt är noll.

   Vi får två ekvationer där använder egenskaper hos skalär produkt och löser ut $\cos(\alpha)$ av vinkeln α mellan vektorer $\overrightarrow{a}$ och $\overrightarrow{b}$. vi använder sedan att $\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) = \left|\overrightarrow{a}\right| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos(\alpha)$ och att $\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}\right) = \left|\overrightarrow{a}\right|^2$.

   $\left(\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot \left(7\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}\right) = 0$

   $\left(\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}\right) \cdot \left(7\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) = 0$

   $\left(\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot \left(7\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}\right) = 7\left|\overrightarrow{a}\right|^2 - 15\left|\overrightarrow{b}\right|^2 + 16\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) = 0$

   $\left(\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}\right) \cdot \left(7\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) = 7\left|\overrightarrow{a}\right|^2 + 8\left|\overrightarrow{b}\right|^2 - 30\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) = 0$

   Addera dessa två ekvationer:

   $23\left|\overrightarrow{b}\right|^2 = 46\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) \implies \left|\overrightarrow{b}\right|^2 = 2\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) = 2\left|\overrightarrow{a}\right| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos(\alpha)$

   $\left|\overrightarrow{b}\right| = 2\left|\overrightarrow{a}\right| \cos(\alpha)$. Sätta detta uttryck i första ekvationen:

   $7\left|\overrightarrow{a}\right|^2 - 15 \cdot 4\left|\overrightarrow{a}\right|^2 \cos^2(\alpha) + 16 \cdot 2\left|\overrightarrow{a}\right|^2 \cos^2(\alpha) = 0$

   $7 - 60\cos^2(\alpha) + 32\cos^2(\alpha) = 0$

   $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{4}$;

   $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$; $\alpha = 60^o$.

   Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40