MATEMATIK	Datum: 2015-01-05	Tid: förmiddag
Chalmers	Hjälpmedel: inga. Mobiltelefoner är förbjudna	
A.Heintz	Telefonvakt: Tim Cardilin	Tel.: 0703-088304

Lösningar till tentan i TMV036 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats.** Formulera och bevisa instängningssatsen (squeeze theorem, eller satsen om två polismännen). **(6p)**

   See Adams.

2. **Kontinuitet.**

   i) Formulera definitionen på funktion kontinuerlig i en punkt.

   ii) Ange om någon av givna funktioner $f(x) = \sin(\exp(-1/x))$ och $g(x) = x \arctan(1/x)$, båda odefinierade i punkt $x = 0$, kan utvidgas till punkten $x = 0$ (d.v.s. definieras i punkten $x = 0$) så att de blir kontinuerliga i den punkten. I fall det är möjligt ange hur man kan göra det. **(6p)**

   Lösning. Definition på kontinuitet i en punkt. Gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar och $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

   $\lim_{x\to 0+} f(x) = \sin(\lim_{x\to 0+}(\exp(-1/x))) = \sin(0) = 0$

   $\lim_{x\to 0-}(\exp(-1/x)) = +\infty$

   $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{y\to +\infty} \sin(y)$ existerar inte eftersom det finns y godtyckligt stora sådana att $\sin(y) = 1$ $(y = \pi/2 + k2\pi)$, eller $\sin(y) = -1$ $(y = -\pi/2 + k2\pi)$, k - godtyckligt stora naturliga tal. Det gör att $\sin(y)$ svänger mellan $+1$ och -1 och kan inte närma sig något tal för $y \to +\infty$.

   Detta medför att $\lim_{x\to 0} f(x)$ existerar inte och $f(x)$ kan inte utvidgas till noll som kontinuerlig funktion.

   $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(x \arctan(1/x)) = 0$ på grund av instängningssatsen.

   Bevis. $\arctan(1/x) < \pi/2$ för alla $x \neq 0$. Det gör att $-x(\pi/2) \leq \arctan(1/x) \leq x(\pi/2)$ där $\lim_{x\to 0} -x(\pi/2) = \lim_{x\to 0} x(\pi/2) = 0$.

   Gränsen $\lim_{x\to 0}(x \arctan(1/x)) = 0$ följer. Detta medför att $g(x)$ kan utvodgas till $x = 0$ som kontinuerlig funktion som $g(0) = 0$.

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x^2}$

   i) Bestäm punkter där funktionen ar definierad, kontinuerlig. Bestäm kritiska punkter, singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns. **(6p)**

   ii) Bestäm de intervall där funktionen ar växande, avtagande, böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav upp och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. **(4p)**

   Lösning. Funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x^2}$ är odefinierad då $(x^2 - 1) < 0$ och $x = 0$ och är definierad för alla andra reella x, d.v.s

   $f(x)$ är definierad och kontinuerlig för $x \leq -1$ och $1 \leq x$.

   $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x^2}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{2}{x^3}\sqrt{x^2-1} = \frac{(2-x^2)}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

Vi observerar att f har två kritiska punkter: $x_1 = \sqrt{2}$ och $x_2 = -\sqrt{2}$.

f har dessutom två singulära punkter: $x_3 = -1$ och $x_4 = 1$ där derivatan är odefinierad. Punkten $x = 0$ där uttrycket $\frac{(2-x^2)}{x^3\sqrt{x^2-1}}$ är också odefinierad ingår inte i funktionens definitionsmängd och är därför inte en singulär punkt.

Kritiska punkter x_1 och x_2 är lokala maxima på grund av första derivatans test: $\frac{(2-x^2)}{x^3\sqrt{x^2-1}} > 0$ för x lite mindre $x_2 = -\sqrt{2}$ och $\frac{(2-x^2)}{x^3\sqrt{x^2-1}} < 0$ för x lite större $x_2 = -\sqrt{2}$ på grund av att $\frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}} < 0$ runt $x_2 = -\sqrt{2}$ och $(2 - x^2)$ byter tecknet i x_2 från minus till plus. Likadant resonemang gäller andra kritiska punkten.Man kan också lägga märke till att funktionen f är jämn: $f(x) = f(-x)$. Detta medför att grafen till funktionen är symmetrisk med avseende på y-axeln och den har exakt samma lokalt maximum $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2}$ i punkten $x_1 = \sqrt{2}$ som i $x_2 = -\sqrt{2}$.

Derivatan $\frac{(2-x^2)}{x^3\sqrt{x^2-1}} < 0$ för punkter $x < x_3$ nära $x_3 = -1$ och $\frac{(2-x^2)}{x^3\sqrt{x^2-1}} > 0$ för för punkter $x > x_4$ nära $x_4 = 1$. Första derivatans test medför att f har lokala minima $f(x_4) = f(x_3) = 0$ i singulära och samtidigt - gränspunkter x_3 och x_4.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{(1/x^2-1/x^4)}}{1} = 0$. $f(x) \geq 0$ i hela definitionsmängden.

Detta medför att f har absolut maximum i punkterna x_1 oc x_2 och absolut minimum i punkterna x_3 och x_4.

Funktionen f är växande på intervall $(-\infty, -\sqrt{2})$ och $(1, \sqrt{2})$. Den är avtagande på intervall $(-\sqrt{2}, -1)$ och $(\sqrt{2}, \infty)$.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x^2}\right) = \frac{6}{x^4}\sqrt{x^2-1} - \frac{3}{x^2\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{(2x^4-9x^2+6)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)(x^2-1)x^4}$$

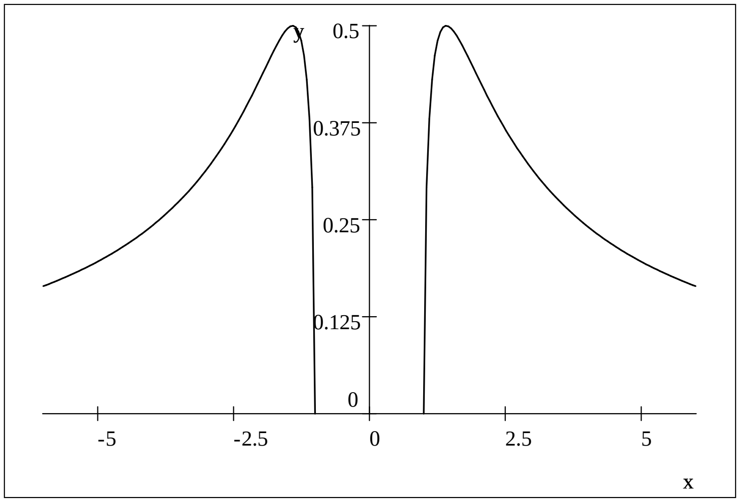
Rötter av andra derivata definieras av rötter till polynomet $(2y^2 - 9y + 6)$. Den har rötter: $y_1 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{33} = \frac{1}{4}\left(9 + \sqrt{33}\right)$ och $y_2 = \frac{1}{4}\left(9 - \sqrt{33}\right)$.

$y_2 = \frac{1}{4}\left(9 - \sqrt{33}\right) < 1$ eftersom $\sqrt{33} > 5$ och $9 - \sqrt{33} < 4$. Detta medför att $\sqrt{y_2} < 1$ och $\pm\sqrt{y_2}$ ligger utanför definitionsmängden av funktionen f.

Andra derivata är noll i punkter $x_5 = \sqrt{y_1} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{33}}$, $x_6 = -\sqrt{y_1} = -\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{33}}$.

Andra derivata byter tecknet i dessa punkter och de är böjningspunkter av funktionen f.

Funktionen f är konkav upp på intervall $(-\infty, x_6)$ och $(x_5, +\infty)$. f är konkav neråt på intervall $(x_6, -1)$ och $(1, x_5)$. Grafen till funktionen är:



4. **Linjär approximation.** Betrakta funktionen $f(x) = \cos(x)$ och dess linjär approximation för $x = \frac{3}{4}\pi - 0.1$ och $a = \frac{3}{4}\pi$. Uppskatta feltermen för approximationen och ange intervallet där värdet $\cos(\frac{3}{4}\pi - 0.1)$ måste ligga enligt dina uppskattningar. **(6p)**

   Lösning. Linjär approximation runt punkten a är $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Felet vid approximationen är $E(x) = f(x) - L(x) = \frac{1}{2}f''(z)(x-a)^2$, där z är en okänd punkt som ligger mellan x och a.

   För givna funktionen $\cos(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin x$; $-\sin(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{d^2}{dx^2}(\cos(x)) = -\cos x$.

   $x - a = \left(\frac{3}{4}\pi - 0.1\right) - \frac{3}{4}\pi = -0.1$

   $L(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(-0.1) = -0.9\frac{\sqrt{2}}{2}$

   $E(x) = -\frac{1}{2}\cos(z)(-0.1)^2 = -0.005\cos(z)$;

   $\frac{3}{4}\pi - 0.1 \leq z \leq \frac{3}{4}\pi$. $\cos(z) < 0$ och $|\cos(z)|$ är växande funktion på intervall $(\pi/2, \pi)$. Detta medför att $E(x) > 0$ och $|\cos(z)| \leq \left|\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Svar: $0 < E(x) \leq 0.005\frac{\sqrt{2}}{2}$ och $-0.9\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(\frac{3}{4}\pi - 0.1) \leq -0.9\frac{\sqrt{2}}{2} + 0.005\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.895\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. **Gränsvärde.** Beräkna gränsvärdet. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+x^2)}\right)$ **(6p)**

   Lösning. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+x^2)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\ln(1+x^2)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{(x^2+O(x^4))\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(1+O(x^2))\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}\right) = \frac{1}{2}$.

6. **Plan i rummet.** Beräkna avståndet mellan ett plan och origo om planet skär koordinataxlarna i punkter a, b, c. **(4p)**

   Lösning. Planet har ekvationen $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Normal till planet är vektor N med komponenter: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$. Avståndet mellan planet och origo är: $1/|N|$. **Svar:**

$$d(0) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}}$$

7. **Linjer i rummet**.Bestäm om två följande linjer skär varandra. Linjer är givna med ekvationer: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4}$ och $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ **(6p)**

Lösning. Linjer skär varandra om de ligger i samma plan och är inte parallella. Dessa två linjer är inte parallella eftersom de har ickeparallella riktningsvektorer med komponenter $(2, 1, 4)$ och $(3, -2, 1)$.

Dessa linjer innehåller punkter med koordinater $(1, 7, 5)$ och $(6, -1, 0)$. Vektorn $\overrightarrow{w}$ mellan dessa punkter är

$$\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Linjerna ligger i samma plan (och skär varandra) om deras riktningsvektorer och vektorn $\overrightarrow{w}$ ligger i samma plan. Kriteriet för detta är att determinant av matris av dessa tre vektorer är noll, eller parallelepiped byggt på dessa vektorer har volum noll:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -5 & 8 & 5 \end{bmatrix} &= 2 \det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} + 4 \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} \\ &= -2 \cdot 18 - 20 + 4 \cdot 14 = -56 + 56 = 0 \end{aligned}$$

Svar: Linjer skär varandra.

8. **Vektorer, skalär produkt.** Betrakta vektorer $\overrightarrow{a}$ och $\overrightarrow{b}$ sådana att $|\overrightarrow{a}| = 2$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 5$, och vinkeln mellan $\overrightarrow{a}$ och $\overrightarrow{b}$ är $\theta = \frac{2}{3}\pi$. Bestäm ett tal C sådant att vektorer $\overrightarrow{p} = C\overrightarrow{a} + 17\overrightarrow{b}$ och $\overrightarrow{q} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ är vinkelräta. **(6p)**

Lösning. Vektorer $\overrightarrow{p}$ och $\overrightarrow{q}$ är vinkelräta om deras skalär produkt är noll: $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = 0$. Vi sätter in uttryck för vektorer $\overrightarrow{p}$ och $\overrightarrow{q}$ och får en linjär ekvation för C.

$\left(C\overrightarrow{a} + 17\overrightarrow{b}\right) \cdot \left(3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) = 0 = 3C\,|\overrightarrow{a}|^2 - C\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 17 \cdot 3\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - 17\left|\overrightarrow{b}\right|^2$

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right| \cos(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}|\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right| = -5$

$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = 12C - C(-5) + 51(-5) - 17 \cdot 25 = 17C - 680 = 0$

$C = 680/17 = 40$. **Svar:** $\overrightarrow{p}$ och $\overrightarrow{q}$ är vinkelräta om $C = 40$.

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, tar sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoang: 50 ; **3**: 20; **4**: 30; **5**: 40