MATEMATIK | Datum: 2015-08-19 | Tid: eftermiddag
Chalmers | Hjälpmedel: inga. **Mobiltelefoner är förbjudna.**
A.Heintz | Telefonvakt: Tim Cardilin | Tel.: 0703-088304

Lösningar till tenta i TMV036 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats.** Formulera och bevisa l'Hopitals första regel. Kolla Adams. **(6p)**

2. **Gränsvärden.**

   i) Formulera definitionen för gränsvärde av funktion i en inre punkt av dess definitionsmängd.

   ii) Betrakta funktioner f och g både odefinierade i $x = 0$:

   $f(x) = \sin\left(\pi\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$och $g(x) = \exp(-\frac{1}{x})$.

   Bestäm om någon av dessa funktioner har gränsvärde då $x \to 0$. **(6p)**

   Lösning. $\lim_{x\to a} f(x) = M$ om för vilket som helst litet $\delta > 0$ kan hittas ett $\varepsilon > 0$ (beroende av δ) sådant att för alla x från intervall $(a - \varepsilon,\, a + \varepsilon)$

   runt a (eller $|x - a| < \varepsilon$) ligger motsvarande värdena $f(x)$ av funktionen i intervallet $(M - \delta, M + \delta)$ (eller $|f(x) - M| < \delta$).

   Betrakta separat vänster och höger-gränsvärden för $f(x) = \sin\left(\pi\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$.

   $\lim_{x\to 0+} \sin\left(\pi\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to 0+} \sin\left(\pi\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0+} \sin(\pi) = 0$

   $\lim_{x\to 0-} \sin\left(\pi\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to 0-} \sin\left(\pi\frac{-x}{x}\right) = \lim_{x\to 0+} \sin(-\pi) = 0$

   Höger och vänster gränsvärden är lika med noll. Detta medför att $\lim_{x\to 0} \sin\left(\pi\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = 0$.

   Betrakta separat vänster och höger-gränsvärden för $g(x) = \exp(-\frac{1}{x})$.

   $\lim_{x\to 0+} \exp(-\frac{1}{x}) = \lim_{y\to -\infty} \exp(y) = 0$

   $\lim_{x\to 0-} \exp(-\frac{1}{x}) = \lim_{y\to +\infty} \exp(y) = +\infty$

   Höger och vänster gränsvärden är olika. Detta medför att $g(x) = \exp(-\frac{1}{x})$ saknar gränsvärde då $x \to 0$.

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen:

   $$g(x) = x - \sqrt{(x-2)(x+1)}$$

   Bestäm dess naturliga definitionsmängd, punkter där funktionen är kontinuerlig, singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns. **(6p)**

   Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, och asymptoter till grafen. Rita en skiss av grafen till funktionen. **(4p)**

   Lösning.

Funktionen är odefinierad då $(x-2)(x+1) < 0$, nämligen på intervallet $(-1,2)$ då uttrycket under roten är negativt. Definitionsmängden består av två interval: $(-\infty,-1]$ och $[2,\infty)$ och funktionen är kontinuerlig i på hela definitionsmängden.

$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(x-\sqrt{(x-2)(x+1)}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)+1$

Singulära punkter, där derivatan är odefinierad är $x_1=-1$ och $x_2=2$ och $\lim_{x\to-1} g'(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 2} g'(x) = -\infty$;

Undersöker derivatans rötter:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)+1 &= 0\\
\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\left(x-\frac{1}{2}\right) &= 1\\
\left(x-\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{x^2-x-2}\\
x^2-x+\frac{1}{4} &= x^2-x-2\\
\frac{1}{4} &= -2 \quad -\mathit{omöjligt}
\end{aligned}$$

Inga stationära punkter finns. Lokala extrempunkter kan vara singulära punkter $x_1=-1$ och $x_2=2$ som är dessutom gränspunkter i definitionsmängden. Derivatan är positiv för $x < x_1$ i närheten av x_1 och är negativ för $x > x_2$ i närheten av x_2. Detta medför att funktionen far ett lokalt maximum i varje av punkterna enligt första derivatans test. Derivatan är dessutom positiv för alla $x < x_1$ eftersom den är alldrig noll och då kan inte bli negativ heller eftersom den är kontinuerlig för $x < x_1$.

Likadant visas att derivatan är negativ för alla $x > x_2$. $g(2) = 2$, $g(-1) = -1$. Detta medför att g har ett absolut maximum i x_2. Funktionen är växande på intervallet $(-\infty,-1)$ och är avtagande på intervallet $(2,\infty)$. Undersöker gränsvärden och asymptoter då $x\to\pm\infty$.

$\lim_{x\to\infty}(g(x)) = \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x-2}\right) =$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(x-\sqrt{x^2-x-2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-x-2}\right)}{x+\sqrt{x^2-x-2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(x^2-\left(x^2-x-2\right)\right)}{x+\sqrt{x^2-x-2}}\right)$

$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2+x+2}{x+\sqrt{x^2-x-2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+\sqrt{x^2-x-2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+2/x}{1+\sqrt{1-1/x-2/x^2}}\right) = 1/2$

Funktions graf har en horisontell asymptot $y = 1/2$ då $x\to\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Detta medför att funktionen saknar absolut minimum. Inget lokalt minimum finns heller.

$\lim_{x\to-\infty}(g'(x)) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)+1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\frac{1}{2} - \frac{x}{-x\sqrt{1-1/x-2/x^2}}+1\right)$

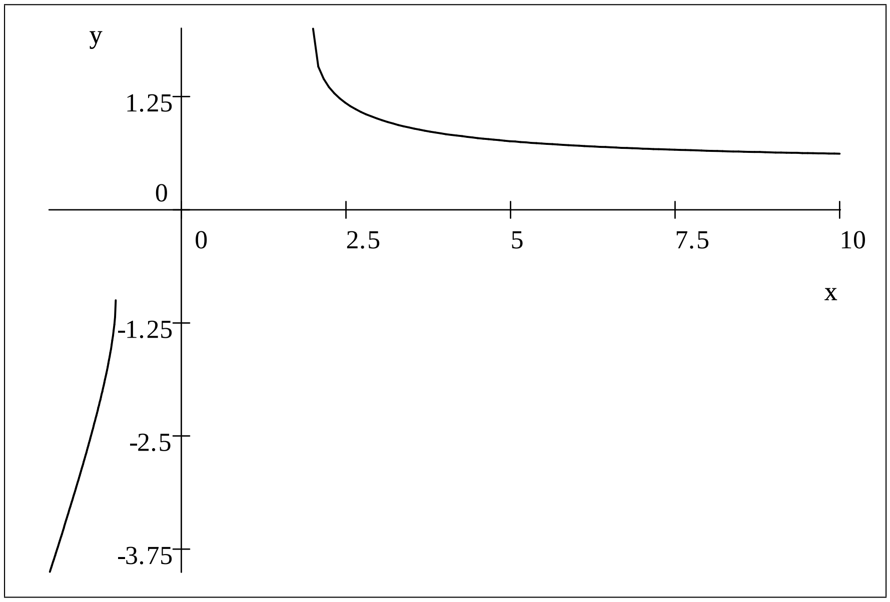
$= 0+1+1 = 2$

Derivatan har gränsvärde 2. Det betyder att det finns en asymptot med lutningen 2 då $x\to-\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}(g(x)-2x) = \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x-2}-2x\right) = -\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x-2}+x\right) =$

$-\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x-2-x^2}{\sqrt{x^2-x-2}-x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+x}{\sqrt{x^2-x-2}-x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2/x+1}{-\sqrt{1-1/x-2/x^2}-1}\right) = -\frac{1}{2}$

Funktionens graf har en asymptot till: $y = -\frac{1}{2} + 2x$ då $x \to -\infty$. Skiss för en graf följer.



4. **Linjär approximation.** Betrakta funktionen $f(x) = \text{atan}(x)$ och dess linjär approximation för $x = 1.1$ och $a = 1$. Uppskatta feltermen för approximationen och ange intervallet där värdet atan(1.1) måste ligga enligt dina uppskattningar. **(6p)**

   Lösning. Allmän formel för linjär approximation $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. Fel $E(x)$ av linära approximationen är $E(x) = f(x) - L(x) = \frac{1}{2}f''(z)(x-a)$ för någon okänd z som ligger mellan x och a. för funktionen uppgiften

   $f(1) = \text{atan}(1) = \pi/4$.

   $f'(x) = \frac{d}{dx}(\text{atan}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$; $f'(x) = \frac{d}{dx}(\text{atan}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -2\frac{x}{2x^2+x^4+1}$

   $f'(x)\big|_{x=1} = \frac{d}{dx}(\text{atan}(x))\big|_{x=1} = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$.

   $L(x) = \pi/4 + \frac{1}{2}(x-1)$. $L(1,1) = \pi/4 + \frac{1}{2}0.1 = \pi/4 + 0,05$.

   $E(x) = \frac{1}{2}f''(z)(1,1-1)^2 = \frac{1}{2}f''(z)0,01$ för en okänd z mellan 1 och $1,1$.

   $\frac{1}{2}f''(z) = \frac{1}{2}(-2)\frac{z}{2z^2+z^4+1} = \frac{-z}{(z^2+1)^2}$

   $\frac{1}{2}f'''(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{-z}{(z^2+1)^2}\right) = \left(z^2+1\right)^{-3}\left(3z^2-1\right) > 0$ för $z > 1$. Det betyder att $\frac{1}{2}f''(z)$ är växande (negativ) funktion på intervallet $[1;1,1]$.

   Detta medför att $\frac{1}{2}f''(z)$ har maximalt absolut belopp i punkten $z = 1$.

   $\max_{x\in[1;1,1]}\left|\frac{1}{2}f''(z)\right| = \frac{1}{(1^2+1)^2} = \frac{1}{4}$. eller $\min_{x\in[1;1,1]}\frac{1}{2}f''(z) = -\frac{1}{4}$.

   Detta medför att $-1/4 \leq \frac{1}{2}f''(z) < 0$ och $-0.0025 \leq E(1,1) < 0$.

   I sin tur skall $\pi/4 + 0,05 - 0.0025 \leq f(1,1) < \pi/4 + 0,05$.

5. **Gränsvärden.** Beräkna gränsvärdet: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \sin(x) - 1}{1-\cos(x)}$ **(6p)**

Lösning. Man kan försöka använda l'Hopitals regel (två gånger)

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - 1}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - \sin(x) - 1)'}{(1-\cos(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - \cos(x))}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - \cos(x))'}{(\sin(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x + \sin(x))}{\cos(x)} = 1$

Alternativt kan man använda Taylors polynom med felterm på $O()$ form.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - 1}{1-\cos(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) - (x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)) - 1}{1 - 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)} = \\
\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + O(x^3)}{\frac{x^2}{2} + O(x^4)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + O(x)}{\frac{1}{2} + O(x)} = 1
\end{aligned}$$

6. **Geometri i rummet.** Bestäm om linjer givna med ekvationer $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$ och $\frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}$ skär varandra (har en gemensam punkt). **(6p)**

Lösning. De givna linjerna är inte parallella. Om två linjer skär varandra så ligger tre följande vektorer i samma plan: deras riktningsvektorer och en godtycklig vektorn mellan två punkter på de linjerna. Detta kan kontroleras med att kolla om determinant där dessa vektorer utgör rader eller kolumner är lika med noll.

Riktningsvektorer är $[5,2,4]'$ och $[3,1,-2]'$. Vektorn $\overrightarrow{AB}$ mellan givna punkter på linjer $A = (3,-1,2)$ och $B = (8,1,6)$ är $\overrightarrow{AB} = [5,2,4]$.

Vi observerar omedelbart att determinanten det $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ =0 eftersom den har två likadana rader. Detta medför att dessa tre vektorer ligger i samma plan och linjerna (som är inte parallella) måste skära varandra.

7. **Geometri i rummet.** Betrakta triangeln ABC med hörnpunkter: $A(4,1,-2)$, $B(2,0,0)$, $C(-2,3,-5)$. Bestäm ekvationen på standart form för triangelns höjd genom punkten B, d.v.s. den linjen som ligger i triangelns plan, går genom punkten B, och är vinkelrät mot sidan AC.

(6p)

Vi har en punkt B på linjen given. Det söker en riktningsvektor $\overrightarrow{\tau} = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]$ till linjen. Då kommer svaret att ha formen:

$$\frac{x-2}{\tau_x} = \frac{y}{\tau_y} = \frac{z}{\tau_z}.$$

$\overrightarrow{\tau}$ ligger i samma plan som vektorer $\overrightarrow{BA}$ och $\overrightarrow{BC}$ och är samtidigt vinkelrät mot vektorn $\overrightarrow{AC}$. Riktningsvektorn $\overrightarrow{\tau}$ kan väljas som

$$\tau = \overrightarrow{AC} \times \left(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right)$$

Vi behöver bara beräkna vektorer $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ och de skalärprodukter som ingår i formeln för k och sätta k in i formeln för $\overrightarrow{\tau}$.

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = [4,1,-2] - [2,0,0] = [2,1,-2]$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = [-2,3,-5] - [2,0,0] = [-4,3,-5]$
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = [-2,3,-5] - [4,1,-2] = [-6,2,-3]$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\tau = \overrightarrow{AC} \times \left(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right) = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 \\ 57 \\ -110 \end{bmatrix}$$

Ekvationen för linjen är

$$\frac{x-2}{74} = \frac{y}{57} = \frac{z}{-110}$$

Annan lösning med kortare beräkning är att framställa $\overrightarrow{\tau}$ i planet med vektorer $\overrightarrow{BA}$ och $\overrightarrow{BC}$ som $\overrightarrow{\tau} = k\,\overrightarrow{BA} + p\overrightarrow{BC}$ och hitta talen p och k så att $\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, eller $k\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + p\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Beräkna först

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = -4, \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 45$$

Det är lätt att se att $k = 45$ och $p = 4$ satisfierar fillkoret $\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + p\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Vi beräknar $\overrightarrow{\tau}$ som

$$\overrightarrow{\tau} = 45\,\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{BC} = 45\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 \\ 57 \\ -110 \end{bmatrix}$$

och får samma svar som innan. Vi kunde i princip få en annan vektor parallel med den vektorn.

8. **Vektorer.** Bestäm vinkeln mellan vektorer $\overrightarrow{a}$ och $\overrightarrow{b}$ givna som $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q}$ och $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} + 5\overrightarrow{q}$, där $\overrightarrow{p}$ och $\overrightarrow{q}$ är enhetsvektorer (har längder lika med 1), och är vinkelräta mot varandra. **(4p)**

Lösning. Cosinus av vinkeln mellan två vektorer beräknas som

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right|}$$

Beräkna skalär produkt mellan $\overrightarrow{a}$ och $\overrightarrow{b}$ med hjälp av regler för skalär produkt:

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (3\overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q}) \cdot (\overrightarrow{p} + 5\overrightarrow{q}) = 3\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} + 15\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + 2\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p} + 10\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{q} = 3 + 10 = 13$, eftersom $\overrightarrow{p}$ och $\overrightarrow{q}$ är vinkelräta mot varandra och $\overrightarrow{p}$ och $\overrightarrow{q}$ är enhetsvektorer ($\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p} = 0$; $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} = 1$; $\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{q} = 1$).

$|\overrightarrow{a}|^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = (3\overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q}) \cdot (3\overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q}) = 9 + 4 = 13$; $\left|\overrightarrow{b}\right|^2 = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{p} + 5\overrightarrow{q}) \cdot (\overrightarrow{p} + 5\overrightarrow{q}) = 1 + 25 = 26$, Detta medför att sökta

$$\cos(\alpha) = \frac{13}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{2}\sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vinkeln är $\pi/4$ eller 45 grader.

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40