# Satser om gränsvärden med bevis som saknas i Adams.

Alla bevisen har samma struktur. Varje bevis består av tre steg. Först formulerar vi om villkoren i satsen i termer av olikheter som måste gälla. Sedan formulerar vi om slutsatserna också med hjälp av olikheter. Efter detta försöker vi transformera slutsatserna som vi vill bevisa så, att efter transformationerna blir det lätt att observera att de verkligen följer från givna villkor. Vi markerar meningen som vi vill bevisa med $\square$ och slutet av varje bevis med $\blacksquare$.

## 1 Sats om uppskattning för en funktion som har gränsvärde (Ex. 32, Section 1.5).

Om $\lim_{x\to a} g(x) = M$ så finns $\delta_M > 0$ sådant att för $0 < |x-a| < \delta_M \implies |g(x)| < 1 + |M|.\square$

Man kan formulera om satsen lite informellt bara med ord. Om en funktion har ett gränsvärde $M$ när argumentet $x$ går mot talet $a$, måste funktionens absolutbelopp bli mindre än absolut belopp av gränsvärdet plus ett (eller vilket som helst annat positivt tal) när argumentets värde blir tillräckligt nära $a$.

**Bevis.**

Vi skriver först ner definitionen av gränsvärde och förklarar vad villkoren i satsen betyder. Vi uttrycker vad det betyder att gränsvärdet $\lim_{x\to a} g(x) = M$ existerar:

För varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att för $0 < |x-a| < \delta_\varepsilon \implies |g(x) - M| < \varepsilon$.

Eller med kortare beteckningar: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$: för $0 < |x-a| < \delta_\varepsilon \implies |g(x) - M| < \varepsilon$.

Nu välj $\varepsilon = 1$. Då finns $\delta_1 > 0$ sådant att för $0 < |x-a| < \delta_1 \implies |g(x) - M| < 1$.

Detta betyder att avståndet mellan talen $g(x)$ och $M$ på reella linjen är mindre än 1 och medför att $|g(x)| - |M| < 1$ och slutligen $|g(x)| < 1 + |M|.\blacksquare$

## 2 Produktregeln för gränsvärden.

Om $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ och $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, så finns gränsvärde $\lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)]$ och $\lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)] = LM$.

**Bevis**

Vi förklarar först villkoren i satsen: Att gränsvärdena $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ och $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ existerar betyder:

För varje $\varepsilon_1 > 0$ finns ett $\delta_{\varepsilon_1} > 0$ sådant att för $0 < |x - a| < \delta_{\varepsilon_1} \implies |f(x) - L| < \varepsilon_1$.

För varje $\varepsilon_2 > 0$ finns ett $\delta_{\varepsilon_2} > 0$ sådant att för $0 < |x - a| < \delta_{\varepsilon_2} \implies |g(x) - M| < \varepsilon_2$.

Vi vill bevisa att $\lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)] = LM$.

Det betyder att vi vill bevisa följande:

För varje $\varepsilon > 0$ vill vi hitta ett $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att för $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \implies |f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$.$\square$

Vi betraktar $|f(x)g(x) - LM|$ - skillnaden mellan $f(x)g(x)$ och $LM$ och försöker hitta en begränsning för $|x - a|$ som garanterar att den blir godtyckligt liten. Vi adderar till $f(x)g(x) - LM$ ett uttryck lika med noll: $-Lg(x) + Lg(x)$ och använder egenskaper hos absolut beloppet: $|a + b| \leq |a| + |b|$ och $|ab| = |a|\,|b|$. Detta leder till följande uppskattningar:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \leq \\ |f(x)g(x) - Lg(x)| + |Lg(x) - LM| &= |g(x)|\,|f(x) - L| + |L|\,|g(x) - M| \end{aligned}$$

och låter oss använda olikheterna $|f(x) - L| < \varepsilon_1$ och $|g(x) - M| < \varepsilon_2$ med godtyckligt små $\varepsilon_1$ och $\varepsilon_2$.

Vi kommer också att använda olikheten $|g(x)| < 1 + |M|$ från föregående sats som gäller för $0 < |x - a| < \delta_M$.

För att ha alla tre olikheterna samtidigt måste vi samtidigt ha $0 < |x - a| < \delta_M$, $0 < |x - a| < \delta_{\varepsilon_1}$, $0 < |x - a| < \delta_{\varepsilon_2}$. För att garantera detta väljer vi $\delta_{\min} = \min\{\delta_M, \delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon 2}\}$.

Om $0 < |x - a| < \delta_{\min}$ gäller $|f(x) - L| < \varepsilon_1$ och $|g(x) - M| < \varepsilon_2$ med godtyckligt små $\varepsilon_1$ och $\varepsilon_2$ och $|g(x)| < 1 + |M|$ samtidigt.

Vi analyserar olikheten som vi fick tidigare:

$$|f(x)g(x) - LM| \leq |g(x)|\,|f(x) - L| + |L|\,|g(x) - M|$$

och vill välja $\varepsilon_1$ och $\varepsilon_2$ så att varje term i högerledet blir mindre än $\varepsilon/2$. Detta skulle medföra

$$|f(x)g(x) - LM| \leq \varepsilon$$

och beviset blir klart. Vi visar nu hur man gör detta.

Betrakta olikheten

$$|f(x)g(x) - LM| \leq (1 + |M|)\,\varepsilon_1 + |L|\,\varepsilon_2$$

som följer från uppskattningarna $|g(x)| < 1 + |M|$, $|f(x) - L| < \varepsilon_1$ och $|g(x) - M| < \varepsilon_2$. Observera att om vi väljer $\varepsilon_1 < (\varepsilon/2)\,/\,(1 + |M|)$ och $\varepsilon_2 < (\varepsilon/2)\,/\,(1 + |L|)$, blir varje term i högerledet av sista uppskattningen mindre än $\varepsilon/2$ exakt som vi ville och beviset blir klart.$\blacksquare$

## 3 Exercise 1.5.34 En undre gräns för en funktion som har ett gränsvärde skild från noll.

Om $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, med $M \neq 0$, måste det finnas ett tal $\delta > 0$ sådant att för $0 < |x - a| < \delta \implies |g(x)| > |M|/2$.$\square$

**Bevis**

Vi börjar med att formulera om villkoren här med hjälp av olikheter. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ betyder att för varje $\varepsilon_0 > 0$ finns ett $\delta_{\varepsilon_0} > 0$ sådant att för $0 < |x - a| < \delta_{\varepsilon_0} \implies |g(x) - M| < \varepsilon_0$.

Välj $\varepsilon_0 < |M|/2$ och motsvarande $\delta_{M/2}$ observera att detta medför att $|g(x) - M| < |M|/2$. Sista olikheten medför att $|M| - |g(x)| < |M|/2$ och efter att flytta $g(x)$ till höger och $|M|/2$ till vänster av olikheten får vi att $|g(x)| > |M|/2$. Detta gäller för $0 < |x - a| < \delta$ med $\delta = \delta_{M/2}$.$\blacksquare$

# 4 Reciprokregeln för gränsvärden. (Ex. 1.5.35)

Om $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, med $M \neq 0$, så existerar $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{g(x)}\right)$ och $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = \frac{1}{M}$.

**Bevis**

Vi börjar med att formulera om villkoren med hjälp av olikheter. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ betyder att för varje $\varepsilon_0 > 0$ finns ett $\delta_{\varepsilon_0} > 0$ sådant att för $0 < |x-a| < \delta_{\varepsilon_0} \implies |g(x) - M| < \varepsilon_0$.

Vi vill visa att $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right|$ kan göras hur liten som helst, t.ex. $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \varepsilon$ med att välja $\delta_\varepsilon > 0$ så att $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \varepsilon$ gäller för alla $x$ på avståndet mindre än $\delta_\varepsilon$ från $a$ (exklusive själva punkten $a$) $0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$.$\square$

Vi transformerar uttrycket $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right|$:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - g(x)}{g(x)M}\right| = \left|\frac{1}{g(x)}\right| \left|\frac{1}{M}\right| |M - g(x)|$$

Enligt föregående resultat från Ex. 2.15.34 kan ett $\delta_{M/2} > 0$ väljas så att för $0 < |x-a| < \delta_{M/2} \implies |g(x)| > |M|/2$ och då $\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \left|\frac{2}{M}\right|$. Detta medför att

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \left|\frac{2}{M^2}\right| |M - g(x)|$$

Nu måste vi välja $\delta_\varepsilon > 0$ så att $\left|\frac{1}{g(x)}\right| \left|\frac{1}{M}\right| |M - g(x)| < \varepsilon$ och beviset blir klart. För att garantera detta väljer vi $\varepsilon_0$ ovan i definitionen för gränsvärde så att $\left|\frac{2}{M^2}\right| \varepsilon_0 < \varepsilon$ eller $\varepsilon_0 < \varepsilon M^2/2$. Vi kan alltid göra detta eftersom $\varepsilon_0$ kan göras hur litet som helst enligt definitionen av gränsvärde för $g$.$\blacksquare$

# 5 Kvotregeln för gränsvärden. (Ex. 1.5.36)

Om $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, och $M \neq 0$ så finns gränsvärde $\lim\limits_{x\to a} [f(x)/g(x)]$ och $\lim\limits_{x\to a} [f(x)/g(x)] = L/M$.$\square$

**Bevis.**

Vi kunde genomföra beviset genom att kombinera idéer från bevisen av produktregeln och reciprokregeln men vi kan nu bara använda dessa två regler för att bevisa kvotregeln.

Gränsvärde $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = \lim_{x\to a}\left[f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)\right] = \lim_{x\to a}[f(x)] \lim_{x\to a}\left[\left(\frac{1}{g(x)}\right)\right]$ enligt produktregeln.

$\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{1}{g(x)}\right)\right] = \frac{1}{M}$ enligt reciprokregeln. Detta medför att $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = L\frac{1}{M} = L/M.$ ■