MATEMATIK	Datum: 2015-10-24	Tid: förmiddag
Chalmers	Hjälpmedel: Inga. Mobiltelefoner är förbjudna	
Thomas Bäckdahl	Telefonvakt: Matteo Molteni	Tel.: 0703-088304

Tentamen i MVE460 Envariabelanalys och analytisk geometri och TMV036 Analys och linjär algebra del A.
Lösningsförslag

1. **Sats.** Formulera och bevisa formeln för derivata av produkten av två funktioner. **(6p)**

   Lösning: Se Adams 2.3 Theorem 3.

2. **Kontinuitet.**

   (a) Formulera definitionen på att en funktion $f(x)$ kontinuerlig i en punkt a.

   (b) Ange om någon av funktionerna $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ och $g(x) = \tan\left(\dfrac{\pi\sqrt{x^2}}{4x}\right)$, båda odefinierade i punkten $x = 0$, kan utvidgas till punkten $x = 0$ (d.v.s. definieras i punkten $x = 0$) så att de blir kontinuerliga i den punkten. I fall det är möjligt ange hur man kan göra det. **(6p)**

   Lösning: (a) f är kontinuerlig i a om gränsvärdet $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existerar och är lika med $f(a)$.
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \Bigg/ \begin{matrix} t = x^{-2} \\ t \to \infty \end{matrix} \Bigg/ = \lim\limits_{t\to\infty} \arctan(t) = \pi/2$, så om vi definierar $f(0) = \pi/2$ blir funktionen kontinuerlig i 0.
   $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \tan\left(\dfrac{\pi|x|}{4x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \tan\left(\dfrac{-\pi x}{4x}\right) = \tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$, men $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \tan\left(\dfrac{\pi|x|}{4x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \tan\left(\dfrac{\pi x}{4x}\right) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ så $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existerar inte. Därför går det inte göra en kontinuerlig utvidgning.

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen

$$f(x) = (x^2+1)e^{1-|x|}.$$

   (a) Bestäm kritiska punkter, singulära punkter, lokala extrempunkter samt största och minsta värde om de finns. **(6p)**

   (b) Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, strikt konvex (konkav uppåt) och strikt konkav (konkav nedåt) samt ange inflexionspunkter (böjningspunkter). Rita en skiss av grafen till funktionen. **(4p)**

   Lösning: För $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+1)e^{1-x}, \\ f'(x) &= 2xe^{1-x} + (x^2+1)e^{1-x}(-1) = -(x^2-2x+1)e^{1-x} = -(x-1)^2e^{1-x}, \\ f''(x) &= -2(x-1)e^{1-x}(x-1)^2e^{1-x}(-1) = (x-1)(x-3)e^{1-x}. \end{aligned}$$

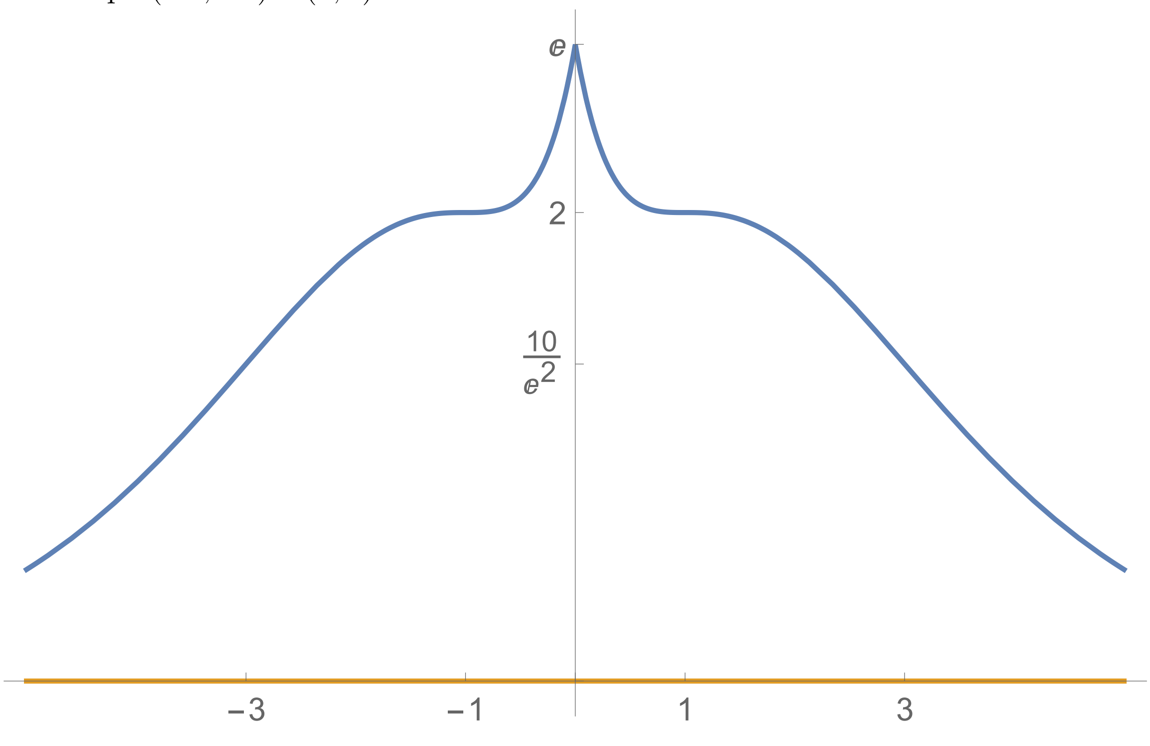
   På samma sätt, för $x < 0$: $f(x) = (x^2+1)e^{1+x}$, $f'(x) = (x+1)^2e^{1+x}$, $f''(x) = (x+1)(x+3)e^{1+x}$. Observera att f och f'' är jämna funktioner och f' är en udda funktion. Funktionen är kontinuerlig i $x = 0$ ty $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = e$. Vänster och högerderivatan i $x = 0$ är $f'_-(0) = e$ och $f'_+(0) = -e$. Dessa är olika så $f'(0)$ existerar ej. Alltså är $x = 0$ en singulär punkt.

Vertikala asymptoter existerar ej på grund av att funktionen är kontinuerlig på $\mathbb{R}$. l'Hôpitals andra regel ger $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)e}{e^x} \underset{typ[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2xe}{e^x} \underset{typ[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2e}{e^x} = 0$. Alternativt ser man det direkt på grund av att exponentialfunktionen växer snabbare än alla polynom. Symmetrin eller en beräkning av samma slag ger $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Funktionen har således horisontell asymptot $y = 0$ både åt höger och vänster.

Kritiska punkter ($f'(x) = 0$) finns i $x = \pm 1$ ty $e^{1\mp x} > 0$. Nollställen till andraderivatan är $x = \pm 1$ och $x = \pm 3$. Teckentabell:

x		-3		-1		0		1		3	
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$10e^{-2}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	e	$\searrow$	2	$\searrow$	$10e^{-2}$	$\searrow$
	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$		$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$
lokala						max					

Observera att den singulära punkten $x = 0$ ger lokalt maximum, men att de kritiska punkterna $x = \pm 1$ inte är lokala extrempunkter på grund av att derivatan har samma tacken på båda sidorna. Funktionen är växande på $(-\infty, 0)$ och avtagande på $(0, \infty)$. Funktionen saknar minsta värde, men har största värde e i punkten $x = 0$. Funktionen är strikt konvex på $(-\infty, 3) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$ och strikt konkav på $(-3, -1) \cup (1, 3)$. Grafen ser ut så här:



4. **Taylor-utveckling.** Ange Taylor-utvecklingen av ordning 3 kring $x = 1$ av funktionen $f(x) = x^x$ med felterm på $\mathcal{O}$-form. (Tips $x^x = e^{x \ln x}$.) (Lägre poäng för ordning 2.) **(6p)**

Lösning: Funktionen och de tre första derivatorna är

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^x = e^{x\ln x} \\
f'(x) &= e^{x\ln x}\tfrac{d}{dx}(x\ln(x)) = e^{x\ln x}(\ln(x)+1), \\
f''(x) &= (\tfrac{d}{dx}e^{x\ln x})(\ln(x)+1) + e^{x\ln x}x^{-1} = e^{x\ln x}((\ln(x)+1)^2 + x^{-1}), \\
f^{(3)}(x) &= (\tfrac{d}{dx}e^{x\ln x})((\ln(x)+1)^2 + x^{-1}) + e^{x\ln x}\tfrac{d}{dx}((\ln(x)+1)^2 + x^{-1}) \\
&= e^{x\ln x}(\ln(x)+1)((\ln(x)+1)^2 + x^{-1}) + e^{x\ln x}(2(\ln(x)+1)x^{-1} - x^{-2}).
\end{aligned}
$$

Detta ger $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = 2$, $f^{(3)}(1) = 3$. Taylors sats ger

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \tfrac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 + \tfrac{1}{3!}f^{(3)}(1)(x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4) \\
&= 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \tfrac{1}{2}(x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4).
\end{aligned}
$$

5. **Gränsvärde.** Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2)}{1-\cos(x)}$. **(6p)**
Lösning: Gränsvärdet kan beräknas med Taylor-utvecklingar eller l'Hôpitals första regel. Här visas metoden med l'Hôpital.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2)}{1-\cos(x)} \underset{\text{typ}[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2} - \frac{-2x}{1-x^2}}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x(1-x^2) + 2x(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4x}{(1-x^4)\sin(x)} \underset{\text{typ}[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4}{-4x^3\sin(x) + (1-x^4)\cos(x)} = \frac{4}{0+1} = 4.
\end{aligned}
$$

6. **Linjer i rummet.** Beräkna minsta avståndet mellan de två linjerna $\mathbf{L}_1$ och $\mathbf{L}_2$, där $\mathbf{L}_1$ är linjen genom $(0,1,3)$ parallell med vektorn $\hat{x} + \hat{y}$ och $\mathbf{L}_2$ ges av $x = 2+t$, $y = 2$, $z = 1-t$ med parameter $t \in \mathbb{R}$. **(6p)**
Lösning: Låt $P_1 = (0,1,3)$, $P_2 = (2,2,1)$, $\bar{v}_1 = \hat{x} + \hat{y}$ och $\bar{v}_2 = \hat{x} - \hat{z}$. Då går $\mathbf{L}_1$ genom P_1 och är parallell med $\bar{v}_1$ och $\mathbf{L}_2$ går genom P_2 och är parallell med $\bar{v}_2$.

Låt P_3 och P_4 vara punkterna på $\mathbf{L}_1$ respektive $\mathbf{L}_2$ som ligger närmast varandra. Då kommer $\overrightarrow{P_3P_4}$ vara vinkelrät mot både $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$, så den är parallell med $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$. Vektoraddition ger $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \overrightarrow{P_4P_2}$. Vektorerna $\overrightarrow{P_1P_3}$ och $\overrightarrow{P_4P_2}$ är parallella med $\bar{v}_1$ respektive $\bar{v}_2$, så de är båda vinkelräta mot $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$. Alltså är $\overrightarrow{P_3P_4}$ projektionen av $\overrightarrow{P_1P_2}$ på $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$. Det sökta avståndet är

$$
s = |\overrightarrow{P_3P_4}| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\bar{v}_1 \times \bar{v}_2)|}{|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2|}.
$$

Vi beräknar därför $\overrightarrow{P_1P_2} = 2\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}$ och

$$
\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\hat{x} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\hat{y} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\hat{z} = -\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}.
$$

Vi får $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\bar{v}_1 \times \bar{v}_2) = 1$ och $|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2| = \sqrt{3}$, så minsta avståndet mellan linjerna är $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. **Geometri i rummet.** Ange på standardform ekvationerna för skärningslinjen mellan de två planen som ges av $3x - y + 2z = 4$ och $x - y + z = 1$. **(6p)**
Lösning: Uppgiften kan lösas med kryssprodukt eller Gausselimination. Vi visar

metoden med Gausselimination. Vi söker lösningen till ekvationssystemet som ges av de båda ekvationerna. På matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{(1)\leftrightarrow(2)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \underset{-3(1)+(2)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\frac{1}{2}(2)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \underset{(2)+(1)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}z = \frac{3}{2} \\ y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Låt $z = 2t$ där $t \in \mathbb{R}$ är en parameter. Linjen beskrivs då på skalär parameterform $x = \frac{3}{2} - t$, $y = \frac{1}{2} + t$, $z = 2t$. Genom att lösa ut och eliminera t får vi standardformen av linjens ekvationer $-x + \frac{3}{2} = y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}z$.

8. **Vektorer i rummet.** En triangel har hörn i punkterna $A = (1, 1, 1)$, $B = (3, 3, 0)$, $C = (5, 2, 2)$. Hur stor är triangelns vinkel vid punkten A? **(4p)**
Lösning: Triangeln spänns upp av vektorerna $\overrightarrow{AB} = 2\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$ och $\overrightarrow{AC} = 4\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$. Triangelns vinkel θ vid punkten A är vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. Skalärprodukten ger $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \cos\theta$. Vi räknar därför ut $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = \sqrt{9} = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + 1 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 + 2 - 1 = 9$. Så $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Således blir vinkeln $\theta = \pi/4 = 45°$.

Tips: Börja med uppgiften som verkar vara lättast, ta sedan den som känns näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3**: 20; **4**: 30; **5**: 40