

**Tentamen i MVE460 Envariabelanalys och analytisk geometri
och TMV036 Analys och linjär algebra del A.**

1. **Sats.** Formulera och bevisa instängningssatsen (The squeeze theorem). (6p)

2. **Kontinuitet.**

a) Formulera definitionen på att en funktion $f(x)$ med $D_f = [a, b]$ är kontinuerlig i punkten a .

b) Ange om någon av funktionerna $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}{x}$ och $g(x) = \sin(1/x)$, båda definierade på $(0, 1]$ kan utvidgas till punkten $x = 0$ (d.v.s. definieras i punkten $x = 0$) så att de blir kontinuerliga i den punkten. I fall det är möjligt ange hur man kan göra det. (6p)

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen

$$f(x) = 5 + x - \frac{6}{x} - 5 \ln(x), \quad 1 < x \leq 6.$$

a) Bestäm kritiska punkter, singulära punkter, lokala extrempunkter samt största och minsta värde om de finns. (6p)

b) Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, strikt konvex (konkav uppåt) och strikt konkav (konkav nedåt) samt ange inflexionspunkter (böjningspunkter). Rita en skiss av grafen till funktionen. (4p)

(Uppskattningarna $3/5 < \ln 2 < 7/10$, $1 < \ln 3 < 11/10$ och $8/5 < \ln 5 < 17/10$ får användas vid behov.)

4. **Taylor-utveckling.** Ange Taylor-utvecklingen av ordning 3 kring $x = 0$ av funktionen $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ med felterm på $\mathcal{O}$ -form. (6p)

5. **Gränsvärde.** Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) + \sin(1 - x)}{1 - x^2 + 2 \ln(x)}$. (6p)

6. **Geometri i rummet.** Bestäm projektionen av linjen $\mathcal{L}$ på planet $2x - 2y + 3z = 2$, där linjen $\mathcal{L}$ går genom punkten $(0, 2, -1)$ och är parallell med vektorn $\mathbf{v} = \hat{x} + \hat{y} - \hat{z}$. Ange svaret på skalär parameter form. (6p)

7. **Geometri i rummet.** Ange ekvationen på standardform för det plan som går genom punkten $(1, 3, -2)$ och är vinkelrät mot linjen $x - 3 = \frac{y + 2}{2} = \frac{z}{3}$. (4p)

8. **Vektorer i rummet.** Bestäm en enhetsvektor $\mathbf{u}$ som bildar lika vinklar med de tre vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (6p)

Tips: Börja med uppgiften som verkar vara lättast, ta sedan den som känns näst lättast o.s.v.