Matematiska vetenskaper
Chalmers
Thomas Bäckdahl

Datum: 2016-01-05 Tid: förmiddag
Hjälpmedel: Inga. Mobiltelefoner är förbjudna.
Telefonvakt: Johannes Borgqvist Tel.: 0703-088304

Tentamen i MVE460 Envariabelanalys och analytisk geometri och TMV036 Analys och linjär algebra del A.

1. **Sats.** Formulera och bevisa instängningssatsen (The squeeze theorem). **(6p)**
   Lösning: Se Adams 1.2 Theorem 4 och Exercise 1.5.38.

2. **Kontinuitet.**

   a) Formulera definitionen på att en funktion $f(x)$ med $D_f = [a, b]$ är kontinuerlig i punkten a.
   Lösning: $f(x)$ är kontinuerlig i a om $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existerar och $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

   b) Ange om någon av funktionerna $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{x}$ och $g(x) = \sin(1/x)$, båda definierade på $(0, 1]$ kan utvidgas till punkten $x = 0$ (d.v.s. definieras i punkten $x = 0$) så att de blir kontinuerliga i den punkten. I fall det är möjligt ange hur man kan göra det.
   Lösning: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{\sin^2(x)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, så om man sätter $f(0) = 1$ blir $f(x)$ kontinuerlig i $x = 0$.
   För alla heltal n blir $g\Big(\dfrac{1}{2\pi n + \pi/2}\Big) = 1$ och $g\Big(\dfrac{1}{2\pi n - \pi/2}\Big) = -1$, men både $\dfrac{1}{2\pi n + \pi/2} \to 0^+$ och $\dfrac{1}{2\pi n - \pi/2} \to 0^+$ då $n \to \infty$, så $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ existerar inte.
   Därför kan $g(x)$ inte utvidgas så den blir kontinuerlig i $x = 0$.

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen

$$f(x) = 5 + x - \frac{6}{x} - 5\ln(x), \qquad 1 < x \le 6.$$

   a) Bestäm kritiska punkter, singulära punkter, lokala extrempunkter samt största och minsta värde om de finns. **(6p)**

   b) Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, strikt konvex (konkav uppåt) och strikt konkav (konkav nedåt) samt ange inflexionspunkter (böjningspunkter). Rita en skiss av grafen till funktionen. **(4p)**

   (Uppskattningarna $3/5 < \ln 2 < 7/10$, $1 < \ln 3 < 11/10$ och $8/5 < \ln 5 < 17/10$ får användas vid behov.)
   Lösning: Funktionen är definierad på det halvöppna intervallet $(1, 6]$, så vi undersöker gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 5 + 1 - 6 - 5\ln(1) = 0$. Derivering ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2} = \frac{(x-3)(x-2)}{x^2}, \\ f''(x) &= \frac{-12}{x^3} + \frac{5}{x^2} = \frac{5x - 12}{x^3}. \end{aligned}$$

   Både $f(x)$ och $f'(x)$ är definierade och kontinuerliga på hela intervallet $1 < x < 6$ så singulära punkter saknas.

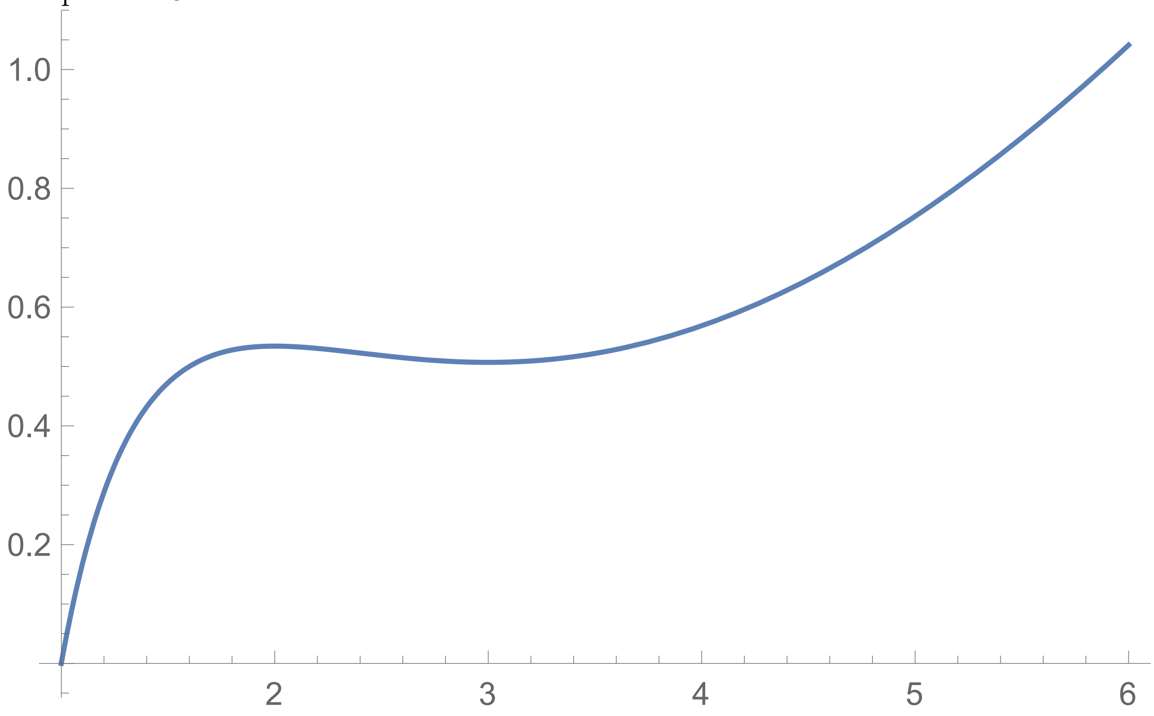
Kritiska punkter ($f'(x) = 0$) finns i $x = 2$ och $x = 3$. Nollställen till andraderivatan är $x = 12/5$.

Teckentabell:

x	1^+		2		$\frac{12}{5}$		3		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$		$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(6)$
		$\frown$	$\frown$	$\frown$	infl.	$\smile$	$\smile$	$\smile$	
lokala			max				min		max

Observera att $x = 1$ inte är en lokal minpunkt ty $1 \notin D_f$. Nu återstår att jämföra $f(2) = 4 - 5\ln 2$, $f(3) = 6 - 5\ln 3$ och $f(6) = 10 - 5\ln 6 = 10 - 5\ln 2 - 5\ln 3$. De givna uppskattningarna av $\ln 2$ och $\ln 3$ ger $\frac{1}{2} = 4 - \frac{7}{2} < f(2) < 4 - \frac{15}{5} = 1$, $\frac{1}{2} = 6 - \frac{11}{2} < f(3) < 6 - 5 = 1$ och $1 = 10 - \frac{7}{2} - \frac{11}{2} < f(6) < 10 - 3 - 5 = 2$. Teckentabellen ger dessutom att $f(2) > f(\frac{12}{5}) > f(3)$ så vi kan dra slutsatsen att vi har största värde $f(6) = 10 - 5\ln 6$ och att minsta värde saknas, ty $f(x) > 0 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ för alla $x \in D_f$.

Funktionen är växande på $(1, 2) \cup (3, 6)$ och avtagande på $(2, 3)$. Funktionen är strikt konvex på $(\frac{12}{5}, 6)$ och strikt konkav på $(1, \frac{12}{5})$. Punkten $x = \frac{12}{5}$ är en inflexionspunkt. Grafen ser ut så här:



4. **Taylor-utveckling.** Ange Taylor-utvecklingen av ordning 3 kring $x = 0$ av funktionen $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ med felterm på $\mathcal{O}$-form. **(6p)**

Lösning: Derivering ger

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\left(1 + \tfrac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}2x\right) = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\
f''(x) &= -\tfrac{1}{2}(1+x^2)^{-3/2}2x = -x(1+x^2)^{-3/2}, \\
f'''(x) &= \frac{-1(1+x^2)^{3/2} - (-x)\frac{3}{2}(1+x^2)^{1/2}2x}{(1+x^2)^3} = \frac{2x^2 - 1}{(1+x^2)^{5/2}}.
\end{aligned}$$

Detta ger $f(0) = \ln(1) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, så Taylor-utvecklingen av $f(x)$ kring $x = 0$ blir

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4) = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4).$$

5. **Gränsvärde.** Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x) + \sin(1-x)}{1 - x^2 + 2\ln(x)}$. **(6p)**
Lösning: Gränsvärdet kan beräknas med l'Hôpitals regel eller variabelbyte $x = 1+t$ och MacLaurin-utvecklingar. Använder här l'Hôpitals regel två gånger:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) + \sin(1-x)}{1 - x^2 + 2\ln(x)} \underset{\text{typ } [\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x^{-1} + \cos(1-x)(-1)}{-2x + 2x^{-1}}$$

$$\underset{\text{typ } [\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-x^{-2} + \sin(1-x)(-1)}{-2 - 2x^{-2}} = \frac{-1}{-2-2} = \frac{1}{4}.$$

6. **Geometri i rummet.** Bestäm projektionen av linjen $\mathcal{L}$ på planet $2x - 2y + 3z = 2$, där linjen $\mathcal{L}$ går genom punkten $(0, 2, -1)$ och är parallell med vektorn $\mathbf{v} = \hat{x} + \hat{y} - \hat{z}$. Ange svaret på skalär parameter form. **(6p)**
Lösning: Planet har normal $\mathbf{n} = 2\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z}$. Vi bestämmer först skärningspunkten mellan linjen $\mathcal{L}$ och planet. En punkt på linjen ges på parameter form av $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$, som instoppat i planets ekvation ger $2t - 2(2+t) + 3(-1-t) = 2$ som ger $t = -3$. Alltså är punkten $P_0 = (-3, -1, 2)$ skärningspunkten mellan $\mathcal{L}$ och planet. Vi kan dela upp $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$, där $\mathbf{v}_\parallel$ är parallell med $\mathbf{n}$ och $\mathbf{v}_\perp$ ortogonal mot $\mathbf{n}$, dvs parallell med planet. Projektionen av $\mathcal{L}$ på planet blir då en linje genom P_0 med riktning $\mathbf{v}_\perp$. Vi beräknar ortogonalprojektionen

$$\mathbf{v}_\parallel = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n} = \frac{-3}{17}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ och får } \mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 23 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Då $17\mathbf{v}_\perp$ också har samma riktning som $\mathbf{v}_\perp$ kan vi skriva projektionen av $\mathcal{L}$ på planet som

$$\begin{cases} x = -3 + 23t \\ y = -1 + 11t \\ z = 2 - 8t \end{cases}.$$

7. **Geometri i rummet.** Ange ekvationen på standardform för det plan som går genom punkten $(1, 3, -2)$ och är vinkelrät mot linjen $x - 3 = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{3}$. **(4p)**

Lösning: Linjen på parameterform får vi av $t = x - 3 = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$

Alltså har linjen riktningen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, som också blir normal till planet, ty linjen skulle vara vinkelrät mot planet. Positionsvektorn till den givna punkten i planet är

$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Positionsvektorn till en godtycklig punkt i planet, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ måste uppfylla $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v} \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 1$ som är planets ekvation på standardform.

8. **Vektorer i rummet.** Bestäm en enhetsvektor $\mathbf{u}$ som bildar lika vinklar med de tre vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(6p)**

Lösning: Låt $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$. Låt α vara vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}_1$. Då är även α vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}_2$ samt mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}_3$. Vi får då

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}| \cos\alpha &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \frac{4u_1 + 3u_3}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4}{5}u_1 + \frac{3}{5}u_3, \\ |\mathbf{u}| \cos\alpha &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|} = \frac{3u_1 + 4u_2}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{3}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_2, \\ |\mathbf{u}| \cos\alpha &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_3}{|\mathbf{v}_3|} = \frac{2u_1 + 2u_2 + u_3}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3. \end{aligned}$$

Att dessa tre uttryck är lika, kan formuleras som

$$\begin{cases} \frac{4}{5}u_1 + \frac{3}{5}u_3 = \frac{3}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_2, \\ \frac{4}{5}u_1 + \frac{3}{5}u_3 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - 4u_2 + 3u_3 = 0, \\ 2u_1 - 10u_2 + 4u_3 = 0 \end{cases}$$

Systemet kan lösas med Gausselimination:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & -10 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Med $u_3 = t$ som parameter får vi $u_1 = -7t$, $u_2 = -t$, $u_3 = t$. $\mathbf{u}$ skulle vara enhetsvektor, så $1 = |\mathbf{u}| = |t|\sqrt{49+1+1}$ ger $|t| = \frac{1}{\sqrt{51}}$. Således uppfyller $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{51}} \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ de givna villkoren.

Maxpoäng: 50 ; **3**: 20; **4**: 30; **5**: 40