Matematiska vetenskaper
Chalmers
Thomas Bäckdahl

Datum: 2016-08-19 Tid: 14.00-18.00
Hjälpmedel: Inga. Mobiltelefoner är förbjudna.
Telefonvakt: Tel.:

Lösningsförslag till
Tentamen i MVE460 Envariabelanalys och analytisk geometri och TMV036 Analys och linjär algebra del A.

1. **Sats.** Formulera och bevisa Rolles sats. **(6p)**
Lösning: Se boken sats 2.8.15 sid 141.

2. **Gränsvärden.**

a) Formulera definitionen för gränsvärde av en funktion i en inre punkt av dess definitionsmängd.
Lösning: Definitionen av gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x) = L$: För varje $\epsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - L| < \epsilon$ för alla x som uppfyller $|x - a| < \delta$.

b) Betrakta funktionerna $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ och $g(x) = \arctan(1/x)$ båda odefinierade i $x = 0$. Bestäm om någon av dessa funktioner har gränsvärde då $x \to 0$. **(6p)**

Lösning: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \dfrac{1}{2}$.
$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \backslash t = \dfrac{1}{x} \backslash = \lim_{t\to\infty} \arctan(t) = \dfrac{\pi}{2}$ men $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \backslash t = \dfrac{1}{x}\backslash = \lim_{t\to -\infty} \arctan(t) = -\dfrac{\pi}{2}$, så $\lim_{x\to 0} g(x)$ existerar inte.

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \arctan(x), & x < 0 \\ 2x^3 - 2x^2 + 1, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Bestäm kritiska punkter, singulära punkter, lokala extrempunkter samt största och minsta värde om de finns. **(6p)**

b) Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, strikt konvex (konkav uppåt) och strikt konkav (konkav nedåt) samt ange inflexionspunkter (böjningspunkter). Rita en skiss av grafen till funktionen. **(4p)**

Lösning: Funktionen är definierad på intervallet $(-\infty, 1]$, så vi undersöker gränsvädet $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1 + \arctan(x)) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$.
Funktionen är kontinuerlig i skarvpunkten $x = 0$ ty $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1+\arctan(x)) = 1$ och $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x^3 - 2x^2 + 1) = 1 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$. Derivatan är

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & x < 0 \\ 6x^2 - 4x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

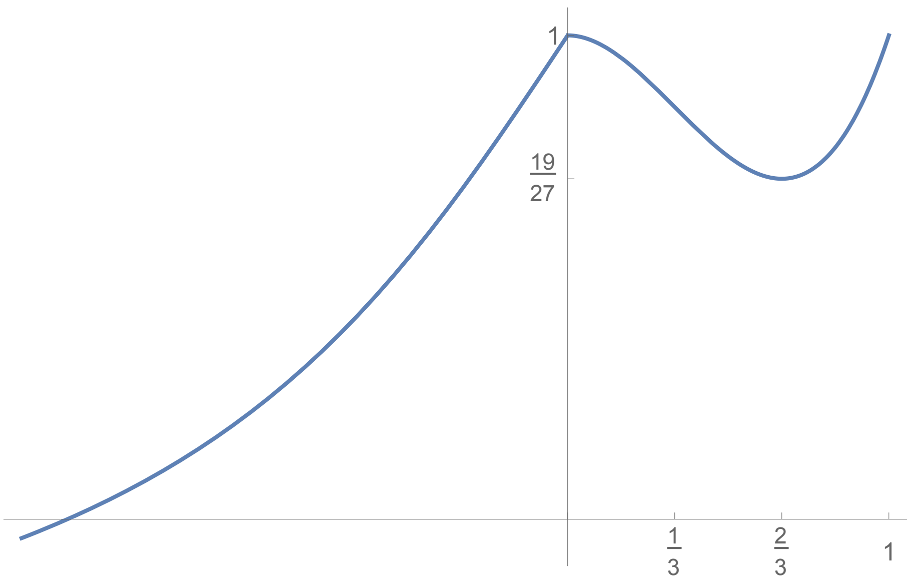
I punkten $x = 0$ är funktionen inte deriverbar ty $f'_-(0) = 1$, men $f'_+(0) = 0$. Således är $x = 0$ en singulär punkt. Kritisk punkt ($f'(x) = 0$) finns i $x = 2/3$. Observera att $x = 0$ är en singulär punkt och därför inte en kritisk punkt. Andraderivatan är

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & x < 0 \\ 12x - 4 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Andraderivatan har nollställe i $x = 1/3$. $f''(0)$ existerar inte på grund av att $f'(0)$ inte existerar. Teckentabell:

x	$-\infty$		0		$1/3$		$2/3$		1
$f'(x)$		$+$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$1-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$		$\searrow$	$19/27$	$\nearrow$	1
		$\smile$		$\frown$	infl.	$\smile$		$\smile$	
lokala			max				min		max

Mista värde saknas ty $f(x)$ kan komma godtyckligt nära $1 - \frac{\pi}{2}$, men värdet uppnås aldrig. Största värde 1 i $x = 0$ och $x = 1$. Funktionen är växande på $(-\infty, 0) \cup (2/3, 1)$ och avtagande på $(0, 2/3)$. Strikt konvex på $(-\infty, 0) \cup (1/3, 1)$ och strikt konkav på $(0, 1/3)$. Inflexionspunkt i $x = 1/3$. Observera att $x = 0$ inte är inflexionspunkt ty tangentlinje saknas i punkten. Grafen ser ut så här:



4. **Taylor-utveckling.** Ange Taylor-utvecklingen av ordning 3 kring $x = 2$ av funktionen $f(x) = \ln(x^2 - 2)$ med felterm på $\mathcal{O}$-form. **(6p)**

Lösning: Derivering ger $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-2}$, $f''(x) = -\dfrac{2(x^2+2)}{(x^2-2)^2}$, $f'''(x) = \dfrac{4x(x^2+6)}{(x^2-2)^3}$. Taylor-utvecklingen blir

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)(x-2)^2}{2!} + \frac{f'''(2)(x-2)^3}{3!} + \mathcal{O}\big((x-2)^4\big) \\ &= \ln(2) + 2(x-2) - \frac{3(x-2)^2}{2} + \frac{5(x-2)^3}{3} + \mathcal{O}\big((x-2)^4\big) \end{aligned}$$

5. **Gränsvärde.** Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2) - \cos(x)}{\sin(x^2)}$. **(6p)**

Lösning: Gränsvärdet kan beräknas med l'Hôpitals regel eller MacLaurin-utvecklingar.

Använder här l'Hôpitals regel två gånger:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{\sin(x^2)} \underset{\text{typ }[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}+\sin(x)}{2x\cos(x^2)} \underset{\text{typ }[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(4x^2+2)e^{x^2}+\cos(x)}{2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)} = \frac{3}{2}$$

6. **Geometri i rummet.** Ange ekvationen på standardform för det plan som går genom linjen $\dfrac{x-2}{2} = y-2 = -z-1$ och punkten $(0,3,2)$. **(6p)**
Lösning: Planet går enligt uppgift genom punkten $Q = (0,3,2)$. Linjen kan skrivas som $x = 2+2t$, $y = 2+t$, $z = -1-t$. Linjen går därför genom punkten $P = (2,2,-1)$ och har riktning $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ är parallella med planet så $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är normal till planet. Välj $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (Omskalning spelar ingen roll.) Planet går genom Q, så planets ekvation är $(x-0)-(y-3)+(z-2) = 0$ som på standard form är $x-y+z = -1$.

7. **Geometri i rummet.** Bestäm avståndet mellan de två parallella planen $2x-2y+3z = -2$ och $2x-2y+3z = 5$. **(6p)**
Lösning: Planen är parallella ty normalerna är parallella, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Avståndet mellan planen är därför detsamma som avståndet mellan ena planet och en punkt i det andra planet. Avståndet blir det samma oavsett val av punkt i planet. Välj t.ex. $P_0 = (-1,0,0)$ i första planet. Låt $P_1 = (x_0,y_0,z_0)$ vara den sökta punkten i andra planet som är närmast P_0 och $P = (x,y,z)$ vara en godtycklig punkt i andra planet. P_1 ligger närmast P_0 ifall $\overrightarrow{PP_1}$ är vinkelrät mot $\mathbf{n}$ och $\overrightarrow{P_1P_0}$ är parallell med $\mathbf{n}$. Således är $\overrightarrow{P_1P_0}$ projektionen av $\overrightarrow{PP_0}$ på $\mathbf{n}$. Det sökta avståndet är $s = |\overrightarrow{P_1P_0}| = \dfrac{|\overrightarrow{PP_0}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \dfrac{|\overrightarrow{OP_0}\cdot\mathbf{n}-\overrightarrow{OP}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \dfrac{|-2-(2x-2y+3)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}} = \dfrac{|-2-5|}{\sqrt{17}} = \dfrac{7}{\sqrt{17}}$.
I näst sista steget använde vi att P ligger i andra planet.

8. **Vektorer i rummet.** Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt den ortogonala vektorprojektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ då $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(4p)**
Lösning: Vi får $|\mathbf{u}|^2 = 6$, $|\mathbf{v}|^2 = 6$ och $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3$. Vinkeln fås av sambandet $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$, där θ är vinkeln mellan vektorerna. $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$ så $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ är $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{v}}{2} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

Maxpoäng: 50 ; **3**: 20; **4**: 30; **5**: 40