Dugga i TMV036a 2014
Tillämpning av derivator. Betrakta funktionen:

$$f(x) = \left(x^{1/3}\right) e^{-x^2}$$

Bestäm punkter där funktionen är definierad, kontinuerlig, asymptoter, singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns.

(1p)

Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande. Bestäm böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen.

(1p)

Förslag för lösning.

Funktionen är kontinuerlig för alla reella tal.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ eftersom $x^r e^{-x^2}$ går mot noll för vilken som helst grad av x. Funktionen har en horisontell asymptot $y = 0$ för $x \to \pm\infty$.

Första derivata:

$\frac{d}{dx}\left(x^{1/3}\exp(-x^2)\right) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}\left(e^{-x^2} - 6x^2e^{-x^2}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(6x^2-1\right)\left(e^{-x^2}\right)\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2}$

Origo $x_3 = 0$ är singulär punkt. Derivata är odefinierad där. Vänster och höger derivata går mot plus oändligheten då $x \to \pm 0$.

$\frac{d}{dx}(f)(x) = 0$ bara om $\left(6x^2-1\right) = 0$,

Rötter av $\left(6x^2-1\right) = 0$ är: $\begin{matrix} x_1 = -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ x_2 = \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{matrix}$ - Kritiska punkter är x_1 och x_2. $f(x_1)$ är lokalt minimum och $f(x_2)$ är lokalt maximum eftersom $f'(x)$ byter tecknet från minus till plus i x_1 och byter tecknet från plus till minus i x_2.

$f(x_1)$ är dessutom ett absolut maximum, och $f(x_2)$ är ett absolut minimum eftersom $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ och $f(x) > 0$ för $x > 0$ och $f(x) < 0$ för $x < 0$.

Andra derivata:

$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{1/3}\exp(-x^2)\right) = \frac{1}{9x^{\frac{5}{3}}}\left(36x^4e^{-x^2} - 30x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}\right) =$

$\frac{2}{9}\left(18x^4 - 15x^2 - 1\right)\left(e^{-x^2}\right)\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$

Rötter av andra derivata definieras av ekvationen $18y^2 - 15y - 1 = 0$, där $y = x^2$.

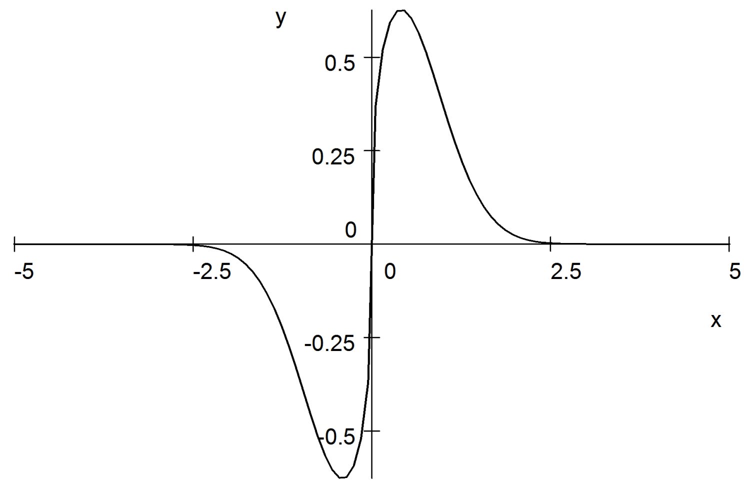
Rötter av $18y^2 - 15y - 1 = 0$ är: $\begin{matrix} y_1 = \frac{1}{12}\sqrt{33} + \frac{5}{12} > 0 \\ y_2 = \frac{5}{12} - \frac{1}{12}\sqrt{33} < 0 \end{matrix}$

Endast reella rötter till ekvationen $18x^4 - 15x^2 - 1 = 0$ är $x_4 = -\sqrt{y_1} = -\sqrt{\frac{1}{12}\sqrt{33} + \frac{5}{12}}$och $x_5 = \sqrt{y_1} = \sqrt{\frac{1}{12}\sqrt{33} + \frac{5}{12}}$ eftersom $y_2 < 0$. Punkter x_4, x_5 är böjningspunkter eftersom $f''(x)$ ändrar tecken i dessa punkter. f har en böjningspunkt till i origo x_3 eftersom $f''(x)$ har olika tecken åt höger och åt vänster av origo och det finns en vertikal tangent i origo. Vänster och höger derivata går mot plus oändligheten då $x \to \pm 0$.

Funktionen är växande på intervall (x_1, x_2) och är avtagande på intervall $(-\infty, x_1)$ och $(x_2, +\infty)$.

Funktionen är konkav upp på intervall $(x_4, 0)$, $(x_5, +\infty)$ och är konkav ner på intervall $(-\infty, x_4)$ och $(0, x_5)$.

Bild med graf på nästa sida.


y
0.5
0.25
0
-5
-2.5
0
2.5
5
x
-0.25
-0.5