MATEMATIK | Datum: 2016-12-21 | Tid: förmiddag
Chalmers | Hjälpmedel: inga. **Mobiltelefoner är förbjudna.**
A.Heintz | Telefonvakt: Alexei Heintz | ankn. 5329

Lösningsförslag till tenta i MVE460 Envariabelanalys och analytisk geometri (TMV036 del a).

1. **Sats.** Formulera och bevisa satsen om gränsvärde av produkt av två funktioner. **(6p)**

2. **Kontinuitet**. Betrakta funktionen:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}; & \text{för} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Ange definition av kontinuerlig funktion.

Bestäm om funktionen f kan definieras i punkten $x = 0$ så att den utvidgade funktionen blir kontinuerlig. **(6p)**

Lösning. En finktion är kontinuerlig i en punkt a of gränsvärdet $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existerar och $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

I fall en funktuion är odefinierad i en punkt a, n kontinuerlig utvidgning är möjlig i fall gränsvärdet $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existerar. Vi multiplicerar täljaren och nämnaren med deras konjugat utryck för att eliminera uttryck med rötter som går mot noll.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(x^2+1-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(x^2+16-16\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right) = \frac{8}{2} = 4$$

Detta medfär att om vi definerar $f(0) = 4$ så blir utvidgate funktiopnen kontinuerlig.

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen:

$$g(x) = |x+1| \exp(-x^2)$$

Bestäm punkter där funktionen är kontinuerlig, singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns. **(6p)**

Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. **(4p)**

Lösning. Vi lägger märke till att $g(x)$ är definierad för alla reella x är icke negativ och har endast nolställe $x_0 = -1$. Det är absolut minimum av funktionen. Funktionen går mot noll för $x \to \pm\infty$: $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$. x-axeln är horisontell asymptot till funktionens graf. Vi kommer att observera senare att funktionen saknar derivatan i punkten x_0 som är singulär punkt.

Vi undersöker funktionens derivator och deras egenskaper. Vi betraktar först funktionen för värden $x > -1$ då $g(x) = (x+1)\exp(-x^2)$

$\frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\left[(x+1)\exp(-x^2)\right] = e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = \left(e^{-x^2}\right)\left(1-2x^2-2x\right)$. Rötter till detta uttryck är : $\begin{matrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2} \end{matrix}$. Bara en av dessa är större än -1: $x_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) \approx 0.35 > 0$ det är stationär punkt och är ett lokalt maximum enligt första derivatans test. Vi lägger märke till att höger derivatan av $g(x)$ i punkten x_0 är $\left(e^{-x^2}\right)(1-2+2) = \left(e^{-x^2}\right) > 0$.

Andra derivatan är

$\frac{d^2}{dx^2}g(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}g(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\left(e^{-x^2}\right)\left(1-2x^2-2x\right)\right) =$

$4x^2e^{-x^2} - 6xe^{-x^2} - 2e^{-x^2} + 4x^3e^{-x^2} = 2\left(e^{-x^2}\right)\left(2x^3+2x^2-3x-1\right) = 2\left(e^{-x^2}\right)(x-1)\left(4x+2x^2+1\right)$.

Rötter av detta uttryck är $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1$ och $x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1$. Bara x_2 och x_3 ä större än -1 (fallet som vi betraktar nu). Dessa två punkter är böjningspunkter till funktionen g för $x > -1$.

Vi betraktar nu funktionen för värden $x < -1$ då $g(x) = -(x+1)\exp(-x^2)$.

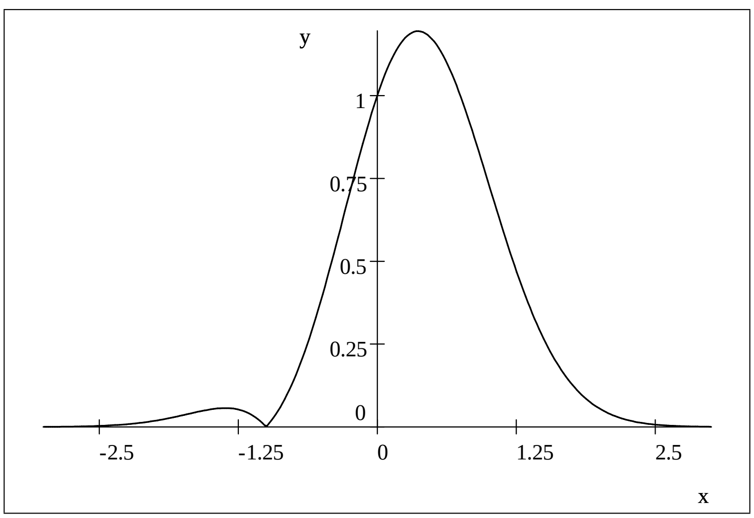
Vi observerar att $\frac{d}{dx}g(x) = -\left(e^{-x^2}\right)\left(1 - 2x^2 - 2x\right)$ för dessa värden av x och $\frac{d^2}{dx^2}g(x) = -2\left(e^{-x^2}\right)(x-1)\left(4x + 2x^2 + 1\right)$.
Så vi kan utnyttja beräkningar som vi genomförde tidigare. Vi observerar en stationär punkt $x_5 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right) < -1$, och en böjningspunkt $x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 < -1$. Punkten x_5 är ett lokalt maximum enligt första derivatans test.

x		x_4		x_5		x_0		x_3		x_1		x_2	
x		$-\frac{1}{2}\sqrt{2}-1$		$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$		-1		$\frac{1}{2}\sqrt{2}-1$		$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$		1	
$g(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	abs. min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	abs. max	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
$g'(x)$	$+$	$+$	$+$	stationär p.	$-$	sing. p.	$+$	$+$	$+$	stationär p.	$-$	$-$	$-$
$g''(x)$	$\cup$	böjning p.	$\cap$	$\cap$	$\cap$		$\cup$	böjning p.	$\cap$	$\cap$	$\cap$	böjning p.	$\cup$

Vi lägger märke till att vänster derivatan av $g(x)$ i punkten x_0 är $-\left(e^{-x^2}\right)(1-2+2) = -e^{-x^2} < 0$. Detta medför att derivatan av g existerar inte i den punkten och att $x_0 = -1$ är en singulär punkt. Det är ett absolut minimum som vi observerade redan innan. Av de två lokala maxima $g(x_1) = g\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\right) \approx (0.35+1)\exp(-(0.35)^2) = (0.35+1)\exp(-0.12) \approx 1.35$ är större än $g(x_5) = g\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\right) = -\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)+1\right)\exp(-\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\right)^2) \approx -\left(-\frac{1}{2}(2.7)+1\right)\exp(-\left(\frac{1}{2}(2.7)\right)^2) = 0.35\exp(-(1.35)^2)$ eftersom $0.35 < 1.35$ och $\exp(-(1.35)^2) < 1$. Detta tillsammans med att $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, medför att $g(x_1) = g\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$ är ett absolut maximum för $g(x)$.

Med att kolla tecknet av derivatan, observeras att $g(x)$ är växande på intervall $(-\infty, x_5)$, (x_0, x_1) och att $g(x)$ är avtagande på intervall (x_5, x_0), $(x_1, +\infty)$.

Funktionen är konvex på intervall (x_4, x_0), (x_3, x_2) och är konkav på intervall $(-\infty, x_4)$, (x_0, x_3), och $(x_2, +\infty)$.



4. **Taylor polynom.** Betrakta funktionen $f(x) = \ln(\cos(x))$. Ange dess Taylor polynom av grad 4 runt $x = 0$. **(6p)**

Lösning.

$\ln(\cos(x))|_{x=0} = 0$

$\frac{d}{dx}\left(\ln(\cos(x))\right) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan(x)|_{x=0} = 0$

$\frac{d^2}{dx^2}\left(\ln(\cos(x))\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right) = -\frac{1}{\cos^2 x}|_{x=0} = -1$

$\frac{d^3}{dx^3}\left(\ln(\cos(x))\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right) = -\frac{2}{\cos^3 x}\sin x|_{x=0} = 0$

$\frac{d^4}{dx^4}\left(\ln(\cos(x))\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{\cos^3 x}\sin x\right) = \frac{1}{\cos^4 x}(2\cos 2x - 4) = \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{4}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^4 x}\sin^2 x\,|_{x=0} = 2 - 4 = -2$

Allmän Taylor polynom av grad fyra för funktion f runt punkt a är:

$P_4(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{1}{2}(x-a)^2 + f^{(3)}(a)\frac{1}{6}(x-a)^3 + f^{(4)}(a)\frac{1}{24}(x-a)^4$

$f(x) = P_4(x) + O\left((x-a)^5\right)$

$P_4(x) == -\frac{1}{2}x^2 - 2\frac{1}{24}x^4 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4$
$\ln(\cos(x)) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + O(x^5)$

5. **Gränsvärden.** Beräkna gränsvärde: $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$. **(6p)**

Lösning. Använd 'Hopitals regel

$\frac{d}{dx}\left(e^{\sin 2x} - e^{\sin x}\right) = 2\left(\cos 2x\right)e^{\sin 2x} - \left(\cos x\right)e^{\sin x}|_{x=0} = 2 - 1 = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x} = \frac{1}{1} = 1$

6. **Geometri i rummet.** Bestäm om följande punkter ligger i samma plan. A: $(3,-2,3)$; B: $(0,4,9)$; C: $(2,0,5)$; D: $(2,-8,-1)$. **(6p)**

Lösning. Vi betraktar tre vektorer som går från en av dessa punkter till tre andra punkter, till exempel AB, AC, och AD.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix};\ \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix};\ \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ -6 \end{bmatrix};\ \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix};\ BD = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -12 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Vi observerar att vektorer $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är parallella.Detta betyder att punkterna A, B, C ligger på samma linje. Detta medför att punkterna A, B, C, D ligger i samma plan som går genom punkten D och linjen gemensamma för punkterna A, B, C. Man kan också se att vektorer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ligger i samma plan med att beräkna determinanten byggd på dem:

$$\det\begin{bmatrix} -1 & -6 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} + 6\det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} - 4\det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = -(12-12) + 6(-6+6) - 4(-6+6) = 0$$

7. **Geometri i rummet.** För vilka värden av konstanter A och B planet $Ax + By + 6z - 7 = 0$ är vinkelrät mot linjen $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$? **(6p)**

Lösning. Planet är vinkelrät mot linjen i fall normalen $\overrightarrow{N}$ till planet är parallell med riktningsvektorn $\overrightarrow{V}$.

$\overrightarrow{N} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ 6 \end{bmatrix};\ \overrightarrow{V} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Två vektorer $\overrightarrow{N}$ och $\overrightarrow{V}$ är parallella om det finns konstant λ sådan att $\overrightarrow{N} = \lambda\overrightarrow{V}$. För givna vektorer denna ekvation ser ut som

$\begin{bmatrix} A \\ B \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ -4\lambda \\ 3\lambda \end{bmatrix}$. Vi observerar att λ måste vara $\lambda = 2$ för att uppfylle likheten för tredje komponenter av vektorer. Likheter för två första komponenter medför att $A = 4$ och $B = -8$.

8. **Vektorer.** Betrakta vektorer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ som sammanfaller med sidor i en triangel. Uttryck vektorer $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ som sammanfaller med medianer i triangeln med hjälp av givna vektorer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$. **(4p)**

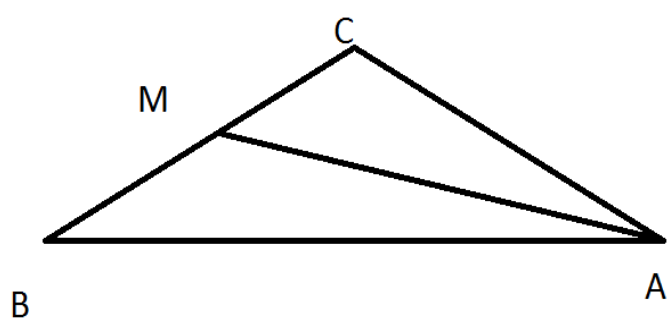
Lösning. Medianen är en linje från ett av triangelns hörn till motstående sidas mittpunkt.

Triangelregeln för vektor addition medför att $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (se bilden).På samma sätt $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ och $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Alternativa uttryck är också möjliga om man istället tillämpar parallellogramregeln: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right)$; $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right)$; $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}\right)$

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40


C
M
B
A