Extra problem i analytisk geometri.

Vektorer

1. Betrakta en triangel där en hörnpunkt $A = (2, -5, 3)$ är given och vektorer $\overrightarrow{AB} = [4; 1; 2]$ och $\overrightarrow{BC} = [3; -2; 5]$ är givna.

Hitta andra hörnpunkter och sidan $\overrightarrow{CA}$

Svar: $B = (6, -4, 5)$, $C = (9, -6, 10)$, $\overrightarrow{CA} = [-7; 1; -7]$.

2. Hitta enhetsvektorer som är samtidigt vinkelräta mot vektorn $a = [3; 6; 8]$, och mot x-axeln.

Svar: $p = [0; -4/5; 3/5]$, $p = [0; 4/5; -3/5]$.

3. Visa att triangeln med hörnpunkterna $A = (5, -4, 0), B = (3, 2, 0)$, $C = (2, -5, 0)$ är vinkelrät.

4. Bestäm för vilka α och γ blir vektorerna $a = [\alpha; 5; -1]$ och $b = [3; 1; \gamma]$ parallella.

Svar: $\alpha = 15$, $\gamma = -1/5$.

5. Betrakta triangeln med sidor givna av vektorer $\overrightarrow{AB} = [2, 1, -2]$ och $\overrightarrow{BC} = [3; 2; 6]$.Beräkna cos av alla vinklar i triangeln.

Svar: $\cos(A) = \sqrt{2}/6$, $\cos(B) = 4/21$, $\cos(C) = 9\sqrt{2}/14$

6. Bestäm höjden h av pyramiden med hörnpunkterna: $S(0, 6, 4)$ (den man räknar höjden ifrån) $A(3, 5, 3)$; $B(-2, 11, -5)$; $C(1, -1, 4)$.

Svar:$h = 3$

8. Visa att om tre vektorer $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ uppfyller ekvationen $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} = 0$

så måste vektorerna ligga i samma plan.

Tips: multiplicera ekvationen skalärt med $\overrightarrow{c}$ och betrakta resultatet.

10. Hur man uttrycker att fyra punkter med ortsvektorer $\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{r_2}$, $\overrightarrow{r_3}$, $\overrightarrow{r_4}$ ligger på samma plan?

Svar: $a(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) + b(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_3}) + c(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_4}) = 0$ där a, b, c är inte noll samtidigt.

11. Kan man hitta hörnpunkterna i en triangel om alla sidor i triangeln är givna vektorer?

Svar: nej.

Plan och linjer

1. Bestäm skärningspunkten mellan linjen$(x + 1)/2 = (y - 3)/4 = z/3$ och planet $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.

Svar: ingen, eftersom linjen och planet är parallella.

2. Bestäm skärningspunkten mellan linjen $(x - 7)/5 = (y - 4)/1 = (z - 5)/4$och planet $3x - y + 2z - 5 = 0$:

Svar:$(2, 3, 1)$

3. Ange ekvationen för planet genom linjen $(x - 3)/2 = (y + 4)/1 = (z - 2)/(-3)$ och parallellt till linjen

$(x + 5)/4 = (y - 2)/7 = (z - 1)/2$.

Svar:$23x - 16y + 10z - 153 = 0$

4. Bestäm distansen mellan en hörnpunkt i en kub med sidan av längden 1 och dess diagonal som inte

går genom den hörnpunkten.

Svar: kvadratisk rot av 2/3.

5. Bestäm planet genom punkten $(3, 1, -2)$ och linjen $(x-4)/5 = (y+3)/2 = z/1$.

Svar: $8x - 9y - 22z - 59 = 0$

6. Bestäm projektionen av punkten med koordinater $(4, -3, 1)$ på planet $x + 2y - z - 3 = 0$.

Svar: $(5, -1, 0)$

7. Bestäm planet genom origo som är vinkelrät mot planen $2x-y+5z+3 = 0$ och $x + 3y - z - 7 = 0$.

Svar: $2x + y - z = 0$.

8. Skriv ekvation till ett plan om projektionen P av origo på planet är given.

9. Hitta ett plan som ligger på avståndet 5 från planet med ekvation $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} = 27$ där $\overrightarrow{r}$ är ortsvektorn av en godtycklig punkt på planet och $n = [4; 2; -4]$ är normalvektorn till planet.

Svar: $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} = 57$ .och $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} = -3$.