Lösningar till tentamen för MVE460

Onsdag den 20 december, $8^{30} - 12^{30}$

1. Se kurslitteraturen (Adams s. 90).

2. Se kurslitteraturen (Adams s. 110)

3. Låt $f(x) = x^2 e^{-|x-1|}$.

Definitionsmängd. Vi börjar med att bestämma definitionsmängd, och noterar att alla ingående funktionerna x^2, e^x och $|x|$ är definierade för alla x, vilket medför att $D_f = \mathbb{R}$.

Kontinuitet. Eftersom funktionen består av sammansättning av funktioner som är kontinuerliga i hela $\mathbb{R}$ så är f också kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$.

Lodräta asymptoter. Eftersom $D_f = \mathbb{R}$ existerar inga lodräta asymptoter.

Vågräta asymptoter. Vi har att

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-|x-1|} = x^2 e^{-(x-1)} = x^2 e^{-x+1} = 0$$

enligt känt gränsvärde. Vidare har vi

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-|x-1|} = x^2 e^{x-1} = 0$$

eftersom e^x går mot noll då $x \to -\infty$. Alltså har vi att $y = 0$ är en vågrät asymptot för funktionen.

Sneda asymptoter. Inga, eftersom vi har lodräta asymptoter då $x \to \pm\infty$.

Lokala extrempunkter och inflektionspunkter. Eftersom funktionen innehåller faktorn $|x-1|$ undersöker vi fallen $x < 1$ och $x > 1$ separat.
$\boldsymbol{x < 1}$: I detta fall har vi att $f(x) = x^2 e^{x-1}$. Derivatan ges av

$$f'(x) = e^{1-x}(2x + x^2).$$

Kritiska punkter ges av $f'(x) = 0$, som har lösningen $x = 0$ och $x = -2$, som båda uppfyller $x < 1$. Andra derivatan ges av

$$f''(x) = e^{1-x}(x^2 + 4x + 2).$$

Eventuella inflektionspunkter ges av $f''(x) = 0$. Detta är uppfyllt endast då $x^2 + 4x + 2 = 0$, som har rötterna $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$ som båda är < 1.
$\boldsymbol{x > 1}$: I detta fall har vi att $f(x) = x^2 e^{1-x}$. Derivatan ges av

$$f'(x) = e^{1-x}(2x - x^2).$$

Kritiska punkter ges av $f'(x) = 0$, som har lösningen $x = 0$ och $x = 2$, där $x = 0$ är en falsk rot eftersom den är mindre än 1. Andraderivatan ges av

$$f''(x) = e^{1-x}(x^2 - 4x + 2).$$

Eventuella inflektionspunkter ges av $f''(x) = 0$. Detta är uppfyllt endast då $x^2 - 4x + 2 = 0$, som har rötterna $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$. Endast $2 + \sqrt{2}$ är en lösning eftersom den andra roten ligger utanför intervallet.
$\boldsymbol{x = 1}$: Vi ser att

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} e^{1-x}(2x - x^2) = 1$$

och att

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{1-x}(2x + x^2) = 3.$$

Höger- och vänstergränsvärdena är olika och derivatan är därför ej definierad i $x = 1$, och detta är därmed en singulär punkt.

Vi gör nu en teckentabell med följande intressanta punkter: $-2 - \sqrt{2}, -2, -2 + \sqrt{2}, 0, 1, 2, 2 + \sqrt{2}$.

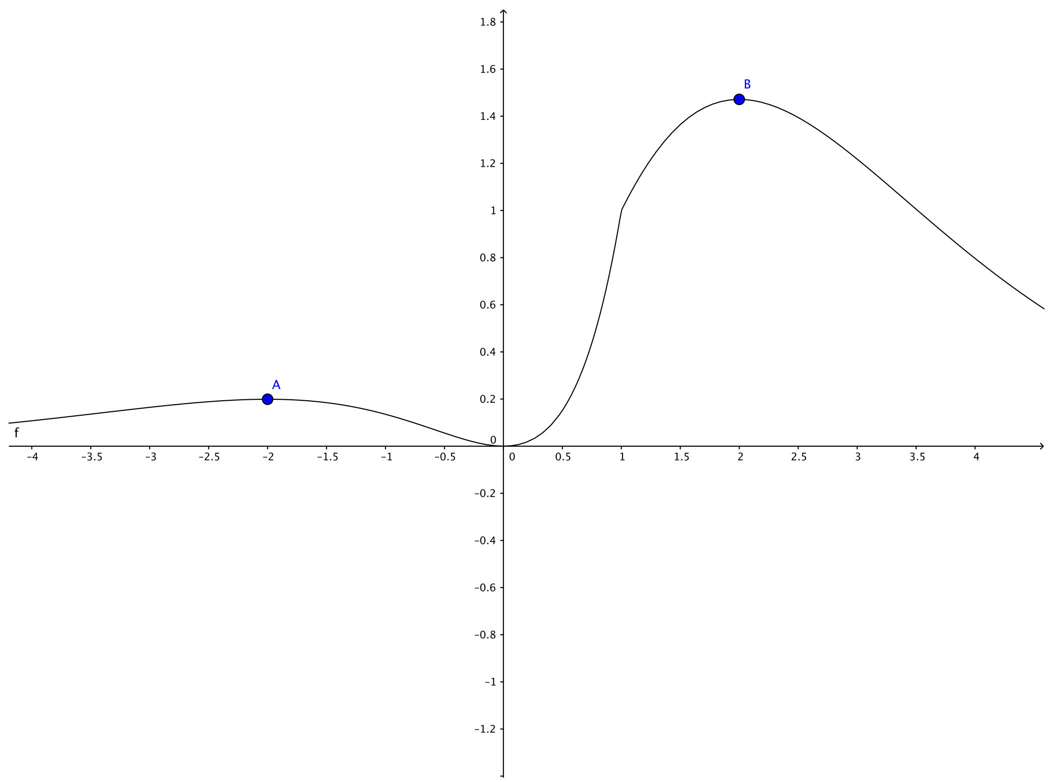
x		$-2-\sqrt{2}$		-2		$-2+\sqrt{2}$		0		1		2		$2+\sqrt{2}$	
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	ej def.	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	ej def.	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$4/e^3$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$4/e$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Vi skissar nu grafen med hjälp av ovanstående information (se nedan).

Från tabellen ser vi att $x = -2$ är ett lokalt maximum, $x = 0$ är ett lokalt minimum och här antar funktionens sitt minsta värde $f(0) = 0$, och $x = 2$ är ett lokalt maximum och här antar funktionens sitt största värde $f(2) = 4/e$.

Derivatans tecken visar att funktionen är växande på $(-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$ och avtagande på $(-2, 0) \cup (2, \infty)$.

Andraderivatans tecken visar att funktionen är konvex på $(-\infty, -2 - \sqrt{2}) \cup (-2 + \sqrt{2}, 1) \cup (2 + \sqrt{2})$ och konkav på $(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}) \cup (1, 2 + \sqrt{2})$.



A
B
f
0

4. Vi noterar först att $x^{-\ln x} = 1/x^{\ln x}$ och använder oss av omskrivningen $a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}$.

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-\ln x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{\ln x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^{(\ln x^{\ln x})}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^{(\ln x)^2}}$$

Låt nu $t = \ln x$. Då har vi att $x \to 0^+ \Rightarrow t \to -\infty$ och

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-\ln x} = \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{e^{t^2}} = \lim_{t \to -\infty} e^{-t^2} = 0.$$

5. För att beräkna Taylorpolynomet av ordning 4 för $f(x) = \sin(x^2)$ kring $x = 0$ så kan vi beräkna Taylorpolynomet av ordning 2 för $g(t) = \sin t$ och sedan sätta in $t = x^2$.

$$P_2(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}t^2 = t.$$

Vi sätter nu $t = x^2$ vilket ger

$$P_4(x) = x^2,$$

som är svaret.

6. De fyra punkterna $P_1 = (0, 1, -2)$, $P_2 = (-2, 3, -4)$, $P_3 = (1, 2, 1)$ och $P_4 = (1, 0, -1)$ ligger i samma plan om de tre vektorer, som går från en av dessa punkter till tre andra punkterna, ligger i ett plan. Vi utgår från P_1 och beräknar $\vec{P_1P_2} = (-2, 2, -2)$, $\vec{P_1P_3} = (1, 1, 3)$ och $\vec{P_1P_4} = (1, -1, 1)$.

Dessa tre vektorer ligger i ett plan om vektorn $\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}$ är vinkelrät mot $\vec{P_1P_4}$, dvs. om $\vec{P_1P_4} \cdot (\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}) = 0$. Detta är den skalära trippelprodukten som vi kan beräkna med hjälp av en determinant:

$$\vec{P_1P_4} \cdot (\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 2 + 2 - 6 - 2 - 2 = 0,$$

vilket innebär att de fyra punkterna ligger i samma plan.

7. Planet som ges av ekvationen $2x - y + Az = 4$ har normalvektor $\mathbf{n} = (2, -1, A)$. Linjen är vinkelrät mot planet om riktningsvektorn för linjen är parallell med

normalvektorn för planet. För att ta reda på riktningsvektorn för linjen skriver vi om den på vektorparametrisk form.

$$\frac{x-1}{4} = -\frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{4} = t$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

Vi ser nu att riktningsvektorn ges av $\mathbf{v} = (4, -2, 4)$. De två vektorerna är parallella om det finns en konstant λ sådan att $\mathbf{n} = \lambda\mathbf{v}$, dvs.

$$\begin{aligned} 2 &= 4\lambda \\ -1 &= -2\lambda \\ A &= 4\lambda. \end{aligned}$$

Vi ser att de två första ekvationerna är uppfyllda om $\lambda = 1/2$, vilket insatt i tredje ekvationen ger $A = 2$.

Skärningspunkten mellan planet och linjen är en punkt på linjen sådan att planets ekvation är uppfylld. Vi tar alltså en godtycklig punkt på linjen $(1 + 4t, -3 - 2t, 2 + 4t)$ och stoppar in i ekvationen för planet $2x - y + 2z = 4$ och löser ut t.

$$\begin{aligned} & 2x - y + 2z = 4 \\ \iff & 2(1 + 4t) - (-3 - 2t) + 2(2 + 4t) = 4 \\ \iff & 18t = -5 \\ \iff & t = -\frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Insatt i ekvationen för linjen fås nu skärningspunkten som $(-\frac{1}{9}, -\frac{22}{9}, \frac{8}{9})$.

8. Vi ska visa att $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. Satsen som relaterar skalärprodukt och mellanliggande vinkel θ säger att

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta.$$

Vi tar nu beloppet av båda leden och får att

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \Big||\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta\Big| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\cos\theta| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

eftersom $|\cos\theta| \leq 1$. Vi har därmed visat att $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.