Lösningar till tentamen för MVE460
Tisdag den 24 oktober, $8^{30} - 12^{30}$

1. Se kurslitteraturen (Adams s. 109).

2. Låt $f(x) = 2x + \ln(x^2 - 2)$. Vi börjar med att bestämma definitionsmängd, och noterar att $\ln(x^2 - 2)$ endast är definierad då argumentet $x^2 - 2 > 0$, dvs. då $x^2 > 2$. Detta är sant då $x < -\sqrt{2}$ och $x > \sqrt{2}$ och vi har alltså att $D_f = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$. Vi börjar med att undersöka eventuella lokala extrempunkter.

Derivatan ges av

$$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2 - 2}$$

som är definierad för alla $x \in D_f$ och därför existerar inga singulära punkter. Kritiska punkter ges av $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} & 2 + \frac{2x}{x^2 - 2} = 0 \\ \iff & 2x = 4 - 2x^2 \\ \iff & x^2 + x - 2 = 0 \\ \iff & x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\ \iff & x = -2 \text{ eller } 1 \end{aligned}$$

Men $x = 1$ ligger inte i D_f och är därför en falsk rot. Vi har alltså en kritisk punkt i $x = -2$ som också är en lokal extrempunkt. Vi bestämmer karaktär mha teckentabellen.

Andraderivatan ges av

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 2) - 2x2x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-4 - 2x^2}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-2(x^2 + 2)}{(x^2 - 2)^2}$$

och vi ser att $f''(x) < 0$ för alla $x \in D_f$ och f är alltså konkav för alla $x \in D_f$.

Vi undersöker nu asymptoter till $f(x)$.

Lodräta asymptoter. Misstänkt lodräta asymtpoter i $x = -\sqrt{2}$ och $\sqrt{2}$ eftersom $\ln(x)$ går mot $-\infty$ då $x \to 0^+$.

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}^-} 2x + \ln(x^2 - 2) = -\infty$$
$$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} 2x + \ln(x^2 - 2) = -\infty$$

Notera att vi måste använda enkelsidiga gränsvärden eftersom funktionen ej är definierad för $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Vi har alltså lodräta asymptoter i $x = -\sqrt{2}$ och $\sqrt{2}$.

Vågräta asymptoter. Vi har att

$$\lim_{x \to \infty} 2x + \ln(x^2 - 2) = \infty$$

eftersom både $2x$ och $\ln(x^2 - 2)$ växer obegränsat. Vidare har vi

$$\lim_{x \to -\infty} 2x + \ln(x^2 - 2) = \lim_{x \to -\infty} x \left(2 + \frac{\ln(x^2 - 2)}{x} \right) = -\infty$$

där den andra termen går mot noll och $2x$ går mot $-\infty$. Vi har alltså inga vågräta asymptoter.

Sneda asymptoter. Vi har att

$$k_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + \ln(x^2 - 2)}{x} = \lim_{x \to \infty} 2 + \frac{\ln(x^2 - 2)}{x} = 2$$
$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + \ln(x^2 - 2)}{x} = \lim_{x - \to \infty} 2 + \frac{\ln(x^2 - 2)}{x} = 2$$

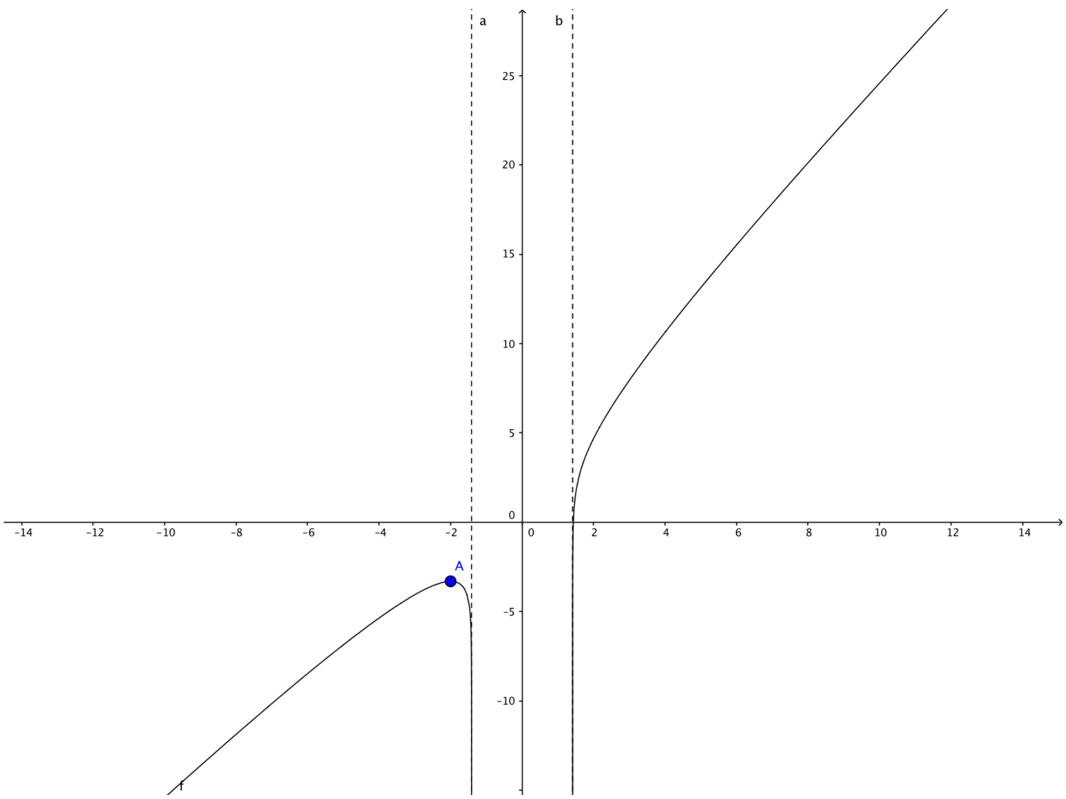
och

$$m_1 = \lim_{x \to \infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to \infty} 2x + \ln(x^2 - 2) - 2x = \lim_{x \to \infty} \ln(x^2 - 2) = \infty$$
$$m_2 = \lim_{x \to -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to -\infty} 2x + \ln(x^2 - 2) - 2x = \lim_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 2) = \infty.$$

Alltså inga sneda asymtpoter.

Vi gör nu en teckentabell med följande intressanta punkter: $-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

x		-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
f'	$+$	0	$-$				$+$
f''	$-$	$-$	$-$				$-$
f	$\nearrow$	$f(-2) = \ln 2 - 4$	$\searrow$	ej def.	ej def.	ej def.	$\nearrow$



Vi ser att $x = -2$ är ett lokalt maximum och att funktionen är växande på $(-\infty, -2) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ och avtagande på $(-2, -\sqrt{2})$. Vi skissar nu grafen med hjälp av ovanstående information.

3. För att approximera $e^{-0.1}$ låter vi $f(x) = e^x$ och beräknar Taylorpolynomet för f av ordning 2 kring $x = 0$.

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2$$

Eftersom $f'(x) = f''(x) = e^x$ har vi att

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Vi får därför att

$$e^{-0.1} = f(-0.1) \approx P_2(-0.1) = 1 + (-0.1) + \frac{(-0.1)^2}{2} = 1 - 0.1 + 0.01/2 = 0.905$$

Felet i uppskattningen $E_2(x) = f(x) - P_2(x)$ i punkten $x = -0.1$ ges av

$$E_2(-0.1) = \frac{f'''(s)}{3!}(-0.1 - 0)^3 = -\frac{e^s(0.1)^3}{6}$$

där $s \in (-0.1, 0)$. Vi ser direkt att felet är negativt och vidare att

$$|E_2(-0.1)| = \left| -\frac{e^s(0.1)^3}{6} \right| = \frac{e^s(0.1)^3}{6} < \frac{(0.1)^3}{6} = \frac{10^{-3}}{6}.$$

4. Vi noterar först att f endast är definierad då $1+x > 0$, dvs. då $x > -1$. Alltså har vi $D_f = (-1, \infty)$ ett sammanhängande intervall. Derivatan ges av

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2(1+x)}$$

och vi ser att $f'(x) > 0$ för alla $x \in D_f$. Det innebär att f är strängt växande vilket medför att f är injektiv och att det existerar en invers.

För att beräkna $(f^{-1})'(\ln 2)$ noterar vi att $f(3) = \ln(\sqrt{1+3}) = \ln(\sqrt{4}) = \ln(2)$. Det medför att $f^{-1}(\ln 2) = 3$ och vi kan använda formeln för inversens derivata

$$(f^{-1})'(\ln 2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\ln 2))} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{2(1+3)}{1} = 8.$$

Alternativt kan man explicit beräkna inversen som ges av $f^{-1}(x) = e^{2x} - 1$ och uitfrån den beräkna $(f^{-1})'(\ln 2)$.

5. Vi börjar med att skriva om ekvationssystemet som en utökad koefficientmatris:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & -10 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & A \end{bmatrix}.$$

Vi flyttar sedan nedersta raden så den hamnar överst

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & A \\ -2 & -2 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

och skapar nollor i första kolumnen genom att multiplicera första raden med 2 och lägga till andra raden och multiplicera första raden med -4 och lägga till tredje raden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & A \\ 0 & 0 & 0 & -4+2A \\ 0 & 2 & 10 & -4A \end{bmatrix}.$$

Vi ser från andra raden att systemet är konsistent om och endast om $-4+2A=0$, dvs. $A=2$.

Då $A=2$ får vi systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & -8 \end{bmatrix}.$$

Vi multiplicerar tredje raden med $1/2$ och byter plats på rad två och tre:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi radreducerar uppåt genom att multiplicera andra raden med -1 och lägga till den första:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta är ekvivalent med att

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 - 10x_3 = 6 \\ 0x_1 + x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Vi sätter $x_3 = t$ och får då att $x_2 = -4-5t$ och $x_1 = 6+10t$. Denna lösningsmängd svarar mot en linje med ekvation $\mathbf{r} = (6,-4,0) + t(10,-5,1)$ för $t \in \mathbb{R}$.

6. För att beräkna planets ekvation beräknar vi normalen genom att ta kryssprodukten mellan två vektorer som ligger i planet. Vi låter $A = (1,2,0)$ och $B = (4,0,1)$ och $C = (2,2,2)$. Vektorerna $\vec{AB} = B - A = (3,-2,1)$ och $\vec{AC} = C - A = (1,0,2)$ ligger i planet och normalen fås som

$$\mathbf{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4,-5,2)$$

Låt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ beteckna en godtycklig punkt i planet och sätt $\mathbf{r}_0 = A = (1, 2, 0)$. Ekvationen för planet kan då skrivas

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= 0 \\ \iff \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 &= 0 \\ \iff -4x - 5y + 2z - (-4 + 2(-5) + 2 \cdot 0) &= 0 \\ \iff -4x - 5y + 2z &= -14 \end{aligned}$$

7. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2$ och enligt definitionen av kryssprodukt är längden $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Om nu $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ så innebär det att vektorerna är vinkelräta och $\theta = \pi/2$. Vi har att $\sin \theta = \sin \pi/2 = 1$, vilket medför att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = (|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \pi/2)^2 = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2$$

8. Se kurslitteraturen (Adams s. 576)