Dugga i TMV036a 2014
Tillämpning av derivator. Betrakta funktionen:

$$f(x) = \sqrt{|x+1|}\exp(-x)$$

Bestäm punkter där funktionen är definierad, kontinuerlig, asymptoter, singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns.

(1p)

Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande. Bestäm böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen.

(1p)

Förslag för lösning.

Funktionen är kontinuerlig för alla reella tal. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ eftersom $x^r e^{-x}$ går mot noll då $x \to +\infty$ för vilken som helst grad x^r av x.

Funktionen har en horisontell asymptot $y = 0$ för $x \to +\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ eftersom både e^{-x} och $\sqrt{|x+1|}$ går mot $+\infty$ då $x \to -\infty$.

Första derivata:

Betraktar funktionen först för $x \geq -1$: $f(x) = \sqrt{|x+1|}\exp(-x) = \sqrt{x+1}\exp(-x)$. Det gör beräkningar enklare. Men vi måste komma ihåg att alla resultat av beräkningar här (kritiska punkter o.s.v.) gäller bara för intervallet $x \in [-1, +\infty)$!

Första derivata i intervall $(-1, +\infty)$ är:

$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+1}\exp(-x)\right) : \frac{1}{\sqrt{x+1}}\left(-\frac{1}{2}e^{-x} - xe^{-x}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)(2x+1)\left(e^{-x}\right)\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

Vi vet ännu inte om derivata existerar i punkten $x = -1$ här!

Roten av $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+1}\exp(-x)\right) = 0 : x_1 = -1/2$ ligger i intervallet $x \geq -1$ som betraktas. x_1 är en kritisk punkt och är ett lokalt maximum, enligt första derivatans test, eftersom derivatan byter tecknet runt x_1: $f'(x)>0$ för $x < x_1$ och $f'(x)<0$ för $x > x_1$ för x nära x_1. Absolut maximum saknas eftersom funktionen antar hur som helst stora värden: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Andra derivatan i intervall $(-1, +\infty)$ är:

$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{x+1}\exp(-x)\right) =$

$\frac{1}{4(x+1)^2}\left(4e^{-x}\left(\sqrt{x+1} + 2x\sqrt{x+1} + x^2\sqrt{x+1}\right) - 4e^{-x}\left(\sqrt{x+1} + x\sqrt{x+1}\right) - \sqrt{x+1}e^{-x}\right)$

$=\frac{1}{4(x+1)^{3/2}}\left(4x + 4x^2 - 1\right)\left(e^{-x}\right)$

Rötter av $f''(x) = 0$ är samma som rötter till $\left(4x + 4x^2 - 1\right) = 0$.

Rötter är: $\begin{array}{c} x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} > 0 \\ x_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} < -1 \end{array}$. Andra roten ligger utanför intervall $x \geq -1$ eftersom $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) < -1$.

$f''(x)$ byter tecknet i x_2. $f^{''}(x)<0$ för $x < x_2$ och $f^{''}(x)>0$ för $x > x_2$ för x nära x_2. Det gör att x_2 är en böjningspunkt.

Vi betraktar nu f i intervall $(-\infty, -1]$.

För $x \leq -1$, $\sqrt{|x+1|}\exp(-x) = \sqrt{-x-1}\exp(-x)$

Första derivata i intervall $(-\infty, -1)$ är:

$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{-x-1}\exp(-x)\right) = \frac{1}{\sqrt{-x-1}}\left(\frac{1}{2}e^{-x} + xe^{-x}\right) = \frac{1}{2}(2x+1)\left(e^{-x}\right)\frac{1}{\sqrt{-x-1}}$

$x_1 = -1/2$ ligger utanför intervallet $x < -1$. Funktionen har inga kritiska punkter i intervallet $x < -1$.

Punkten $x_0 = -1$ är singulär punkt och saknar vertikal tangent i x_0 eftersom $\lim_{x\to(-1)-} f'(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to(-1)+} f'(x) = +\infty$.

Funktionen antar sitt absolut minimum lika med noll i singulära punkten $x_0 = -1$ eftersom $f(x) > 0$ i alla andra punkter.

Andra derivatan i intervall $(-\infty, -1)$ har liknande uttryck som i första intervall:

$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{-x-1}\exp(-x)\right) =$

$\frac{1}{4(x+1)^2}\left(e^{-x}\left(-4\sqrt{-x-1}-4x\sqrt{-x-1}\right)-e^{-x}\sqrt{-x-1}+4e^{-x}\left(\sqrt{-x-1}+2x\sqrt{-x-1}+x^2\sqrt{-x-1}\right)\right)$

$=\frac{1}{4}\left(-\left(x+1\right)\right)^{-3/2}\left(4x+4x^2-1\right)\left(e^{-x}\right)$

$\left(4x+4x^2-1\right)=0$,rötter (naturligtvist samma!): $\begin{array}{c} x_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}>0 \\ x_3=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}<-1 \end{array}$ Roten x_3 ligger i intervallet $x<-1$. Roten x_2 ligger utanför intervallet $x<-1$. $f''(x)$ byter tecknet i x_3. $f^{''}(x)$>0 för $x<x_3$ och $f^{''}(x)$<0 för $x>x_3$ för x nära x_3. Det gör att x_3 är en böjningspunkt.

Funktionen är växande på intervall $(-1,x_1)$ och är avtagande på intervall $(-\infty,-1)$ och $(x_1,+\infty)$.

Funktionen är konkav upp på intervall $(-\infty,x_3)$, $(x_2,+\infty)$ och är konkav ner på intervall $(x_3,-1)$ och $(-1,x_2)$.