Lösningar till tentamen för MVE460

Fredag den 24 augusti, $14^{00} - 18^{00}$

1. Se kurslitteraturen (Adams s. 121).

2. Se kurslitteraturen (Adams s. 137)

3. Låt $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$.

Definitionsmängd. Vi börjar med att bestämma definitionsmängd, och noterar att nämnaren är lika med noll för $x = -1$ och 1, vilket medför att $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Lodräta asymptoter. Vi har misstänka lodräta asymptoter i $x = -1$ och 1. Vi undersöker gränsvärden i dessa punkter:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2-4}{x^2-1} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \infty$$

och

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \infty$$
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-4}{x^2-1} = -\infty.$$

Alltså har vi lodräta asymptoter i $x = -1$ och 1.

Vågräta asymptoter. Vi har att

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(1-4/x^2)}{x^2(1-1/x^2)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1-4/x^2}{1-1/x^2} = 1$$

Alltså har vi att $y = 1$ är en vågrät asymptot för funktionen.

Sneda asymptoter. Inga, eftersom vi har lodräta asymptoter då $x \to \pm\infty$.

Lokala extrempunkter och inflektionspunkter. Vi börjar med att leta efter kritiska punkter där $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - (x^2-4)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

Eftersom nämnaren är nollskild i hela D_f har vi att $f'(x) = 0 \iff x = 0$, vilket är den enda kritiska punkten. Vi undersöker om detta är en lokal extrempunkt med hjälp av teckentabell.

Inflektionspunkter är punkter där andraderivatan är noll samt växlar tecken. Vi har att

$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)^2 - 6x2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{6(x^2-1) - 24x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

Vi har att $f''(x) = 0 \iff -6(3x^2+1) = 0$, men denna ekvation har inga reella rötter och därför finns inga inflektionspunkter.

Vi gör nu en teckentabell med följande intressanta punkter: $-1, 0, 1$.

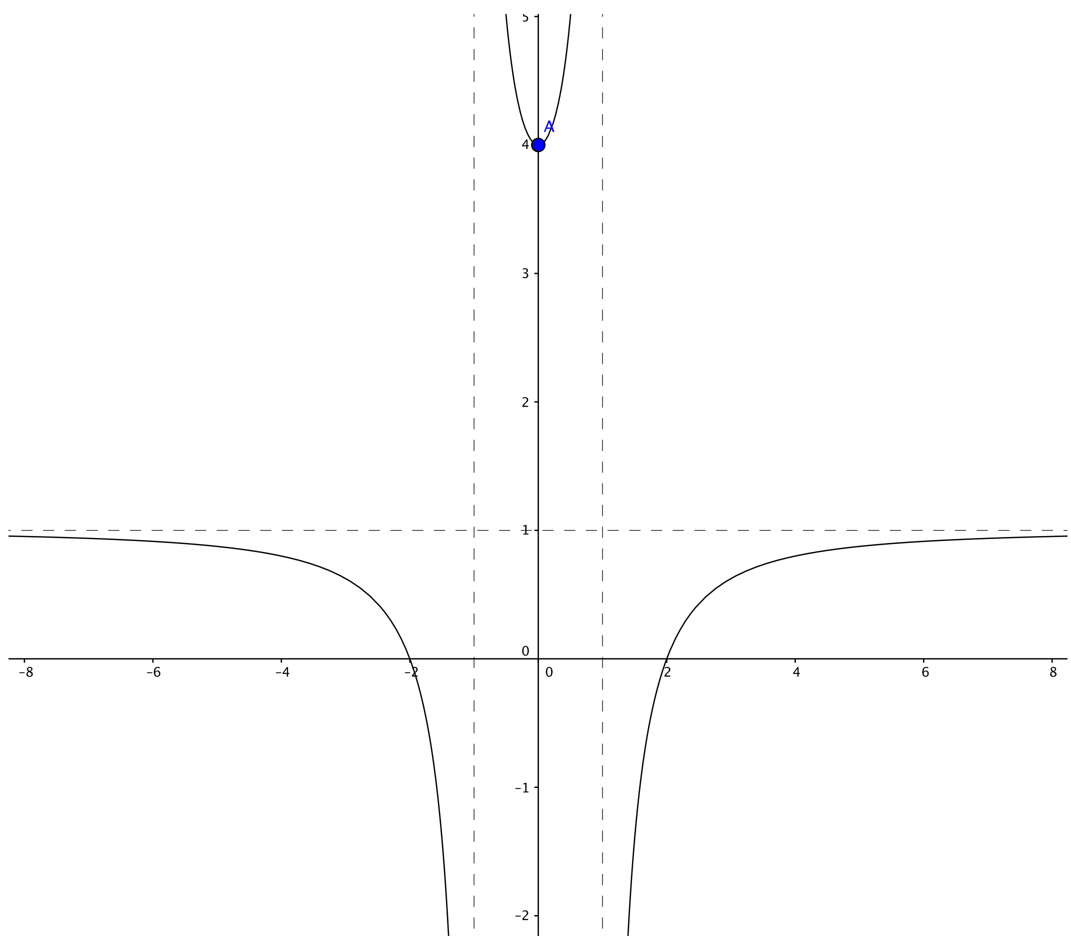
x		-1		0		1	
f'	$-$	ej def.	$-$	0	$+$	ej def.	$+$
f''	$-$	ej def.	$+$		$+$	ej def.	$-$
f	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	4	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$

Vi skissar nu grafen med hjälp av ovanstående information (se nedan).

Från tabellen ser vi att $x = 0$ är ett lokalt minimum.

Derivatans tecken visar att funktionen är växande på $(0, 1) \cup (1, \infty)$ och avtagande på $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

Andraderivatans tecken visar att funktionen är konvex på $(-1, 1)$ och konkav på $(-\infty, -1)$ och $(1, \infty)$.



A
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

4. För att beräkna Taylorpolynomet av ordning 4 för $f(x) = e^{x^2}$ kring $x = 0$ så kan vi beräkna Taylorpolynomet av ordning 2 för $g(t) = e^t$ och sedan sätta in $t = x^2$.

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^3) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3).$$

Vi sätter nu $t = x^2$ vilket ger

$$g(x^2) = f(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6).$$

som är svaret.

5. Insättning av $x = 0$ i uttrycket ger "0/0" och vi måste därför beräkna gränsvärdet på annat vis. Låt $g(x) = \sin(x^2) - \sin(2x)$ och $h(x) = e^x - \cos(3x)$. Vi har alltså ett gränsvärde på formen

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{h(x)}$$

med

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 0$$

och där g, h är deriverbara kring $x = 0$. Vi kan därmed använda l'Hopitals första regel som säger att:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{h'(x)}.$$

Vi har att $g'(x) = \cos(x^2)2x - \cos(2x)2$ och $h'(x) = e^x + \sin(3x)3$ vilket medför att

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{\cos 0 \cdot 2 \cdot 0 - \cos 0 \cdot 2}{e^0 + \sin 0 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 0 - 2 \cdot 1}{1 + 0 \cdot 3} = -2.$$

6. Planet som ges av ekvationen $x + y + z = 0$ har normalvektor $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1)$. Linjen som innehåller punkterna $(1, -2, 1)$ och $(1, 0, -1)$ har riktningsvektor $\mathbf{v} = (1, 0, -1) - (1, -2, 1) = (0, 2, -2)$.

Normalen $\mathbf{n}$ till det sökta planet är vinkelrät mot alla vektorer i planet, vilket medför att $\mathbf{n}$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}$. Eftersom det sökta planet ska vara vinkelrät mot planet $x + y + z = 1$ så måste $\mathbf{n}$ vara vinkelrät också mot $\mathbf{n}_1$. För att få en vektor som är vinkelrät mot både $\mathbf{v}$ och $\mathbf{n}_1$ tar vi kryssprodukten mellan dessa vektorer:

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+2, -2, -2) = (4, -2, -2) = \mathbf{n}.$$

Ekvationen för det sökta planet ges alltså av $4x - 2y - 2z + D = 0$. Vi bestämmer konstanten D genom att sätta in en av punkterna som ligger i planet, tex. $(1, 0, -1)$, vilket ger

$$4 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) + D = 0 \iff 4 + 2 + D = 0 \iff D = -6$$

Planets ekvation ges alltså av $4x - 2y - 2z = 6$.

7. Satsen som relaterar skalärprodukt och mellanliggande vinkel säger att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta$. Eftersom $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor så gäller det att $|\mathbf{u}| = 1$, vilket medför att

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Eftersom $\mathbf{u}$ bildar lika vinklar θ med alla tre vektorer har vi

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = (4u_2 + 3u_3)/5 \\ \cos\theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|} = 2u_2/2 \\ \cos\theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_3}{|\mathbf{v}_3|} = (2u_1 + 2u_2 + u_3)/3. \end{aligned}$$

Genom att sätta högerledet (HL) i den första ekvationen lika HL i den andra och HL i den andra lika med HL i den tredje får vi följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} -5u_1 + 4u_2 + 3u_3 = 0 \\ \quad -u_1 + 2u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

eller på matrisform

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi byter plats på raderna och får

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sedan multiplicerar vi första raden med -5 och adderar till den andra, vilket ger

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Systemet är överbestämt och vi sätter därför $u_3 = t$ i den andra ekvationen, vilket ger $u_2 = -t/3$. Insättning i den första ekvationen ger nu $u_1 = t/3$. Sammanfattningsvis har vi alltså $\mathbf{u} = (t/3, -t/3, t)$. För att bestämma värdet på t använder vi det faktum att $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor, dvs. $|\mathbf{u}| = 1$.

$$|\mathbf{u}| = |t|\sqrt{1/9 + 1/9 + 1} = 1 \iff |t| = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

t kan alltså ta både värdet $\frac{3}{\sqrt{11}}$ och $-\frac{3}{\sqrt{11}}$, vi väljer det senare. Slutligen får vi att $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, -1, 3)$.

8. Vi ska visa att $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{u}$. Vi använder oss av definitionen av kryssprodukt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} &= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) = \\ &= -(u_3v_2 - u_2v_3, u_1v_3 - u_3v_1, u_2v_1 - u_1v_2) = \\ &= -\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \end{aligned}$$

vilket skulle visas.