Lösningar till tentamen för MVE460

Tisdag den 30:e oktober 2018, $8^{30} - 12^{30}$

1. Se kurslitteraturen (Adams s. 177).

2. Se kurslitteraturen (Adams s. 272).

3 (a). $\lim_{x\to a} f(x) = L$ om och endast om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att $0 < |x-a| < \delta$ medför att $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(b). $\lim_{x\to 1} 4x+2 = 6$ om och endast om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att $0 < |x-1| < \delta$ medför att $|4x+2-6| < \varepsilon$.

Låt först $\varepsilon > 0$ vara ett godtyckligt tal. Vi måste hitta ett $\delta > 0$ sådant att $0 < |x-1| < \delta$ medför att $|4x+2-6| < \varepsilon$.

Vi gör först omskrivningen $|4x+2-6| = |4x-4| = |4(x-1)| = 4|x-1|$.

Låt nu $\delta = \varepsilon/4$ och antag att $0 < |x-1| < \delta$. Då har vi att $|4x+2-6| = 4|x-1| < 4\varepsilon/4 = \varepsilon$.

4. Låt $f(x) = |x-1|e^x$.

Definitionsmängd. Vi börjar med att bestämma definitionsmängd, och noterar att alla ingående funktionerna $x-1$, e^x och $|x|$ är definierade för alla x, vilket medför att $D_f = \mathbb{R}$.

Kontinuitet. Eftersom funktionen består av sammansättning av funktioner som är kontinuerliga i hela $\mathbb{R}$ så är f också kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$.

Lodräta asymptoter. Eftersom $D_f = \mathbb{R}$ existerar inga lodräta asymptoter.

Vågräta asymptoter. Vi har att

$$\lim_{x\to\infty} |x-1|e^x = \lim_{x\to\infty} (x-1)e^x = \infty$$

eftersom båda faktorerna växer obegränsat. Vidare har vi

$$\lim_{x\to-\infty} |x-1|e^x = \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^x = [\text{Sätt } t = -x] = \lim_{t\to\infty} -(t+1)e^{-t} = 0$$

enligt känt gränsvärde. Alltså har vi att $y = 0$ är en vågrät asymptot för funktionen.

Sneda asymptoter. Vi har en möjlig sned asymptot då $x \to \infty$ och undersöker eventuellt k-värde.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{|x-1|e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)e^x}{x} = \infty$$

vilket betyder att ingen sned asymptot existerar.

Lokala extrempunkter och inflektionspunkter. Eftersom funktionen innehåller faktorn $|x-1|$ undersöker vi fallen $x < 1$ och $x > 1$ separat.
$\boldsymbol{x < 1}$: I detta fall har vi att $f(x) = -(x-1)e^x$. Derivatan ges av

$$f'(x) = -xe^x.$$

Kritiska punkter ges av $f'(x) = 0$, som har lösningen $x = 0$ som uppfyller $x < 1$. Andraderivatan ges av

$$f''(x) = -(1+x)e^x.$$

Eventuella inflektionspunkter ges av $f''(x) = 0$. Detta är uppfyllt endast då $1 + x = 0$, alltså då $x = -1$ som ligger i intervallet $x < 1$.
$\boldsymbol{x > 1}$: : I detta fall har vi att $f(x) = (x-1)e^x$. Derivatan ges av

$$f'(x) = xe^x.$$

Kritiska punkter ges av $f'(x) = 0$, som har lösningen $x = 0$ som är en falskt rot eftersom den inte uppfyller $x > 1$. Andra derivatan ges av

$$f''(x) = (1+x)e^x.$$

Eventuella inflektionspunkter ges av $f''(x) = 0$. Detta är uppfyllt endast då $1 + x = 0$, alltså då $x = -1$, men detta är en falsk rot som inte uppfyller $x > 1$.
$\boldsymbol{x = 1}$: Vi ser att

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} xe^x = e$$

och att

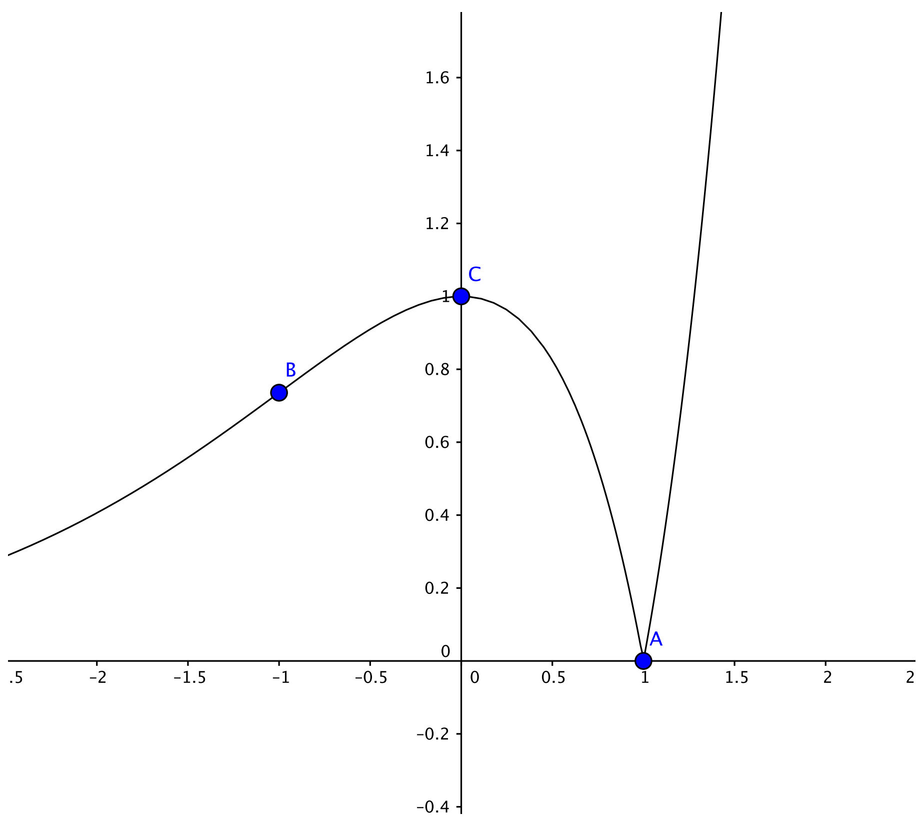
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -xe^x = -e.$$

Höger- och vänstergränsvärdena är olika och derivatan är därför ej definierad i $x = 1$, och detta är därmed en singulär punkt.

Vi gör nu en teckentabell med följande intressanta punkter: $-1, 0, 1$.

x		-1		0		1	
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	ej def.	$+$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	ej def.	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0	$\nearrow$

Vi skissar nu grafen med hjälp av ovanstående information (se nedan).



Från tabellen ser vi att $x = 0$ är ett lokalt maximum, $x = 1$ är ett lokalt minimum och här antar funktionens sitt minsta värde $f(1) = 0$. Eftersom funktion växer obegränsat då $x \to \infty$ så existerar inget största värde.

Derivatans tecken visar att funktionen är växande på $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ och avtagande på $[0, 1]$.

Andraderivatans tecken visar att funktionen är konvex på $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ och konkav på $[-1, 1)$.

5. För att approximera $\ln(1.1)$ låter vi $f(x) = \ln x$ och beräknar Taylorpolynomet för f av ordning 2 kring $x = 1$.

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

Derivatorna ges av $f'(x) = 1/x$ och $f''(x) = -1/x^2$ vilket medför att

$$P_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

Vi får därför att

$$\ln(1.1) = f(1.1) \approx P_2(1.1) = (1.1-1) - \frac{1}{2}(1.1-1)^2 = 0.1 - \frac{0.01}{2} = 0.095.$$

Felet $E_2(x) = f(x) - P_2(x)$ ges av

$$E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!}(x-1)^3$$

där $s \in (1, x)$. Tredjederivatan ges av $f'''(x) = 2/x^3$ varför felet i punkten $x = 1.1$ kan skrivas

$$E_2(1.1) = \frac{f'''(s)}{3!}(1.1-1)^3 = \frac{2}{6s^3}0.1^3 = \frac{10^{-3}}{3s^3}$$

där $s \in (1, 1.1)$. Vi ser direkt att felet är positivt. För att bestämma dess storlek betraktar vi

$$|E_2(1.1)| = \left|\frac{10^{-3}}{3s^3}\right| = \frac{10^{-3}}{3s^3} < \frac{10^{-3}}{3}$$

eftersom $1/s^3$ är avtagande på intervallet $(1, 1.1)$. Vi har alltså att

$$0 < E_2(1.1) < \frac{10^{-3}}{3}$$

vilket betyder att det verkliga värdet ligger i intervallet

$$P_2(1.1) < \ln(1.1) < P_2(1.1) + \frac{10^{-3}}{3}$$

eller

$$0.095 < \ln(1.1) < 0.095 + \frac{10^{-3}}{3}$$

6. För att beräkna planets ekvation beräknar vi normalen genom att ta kryssprodukten mellan två vektorer som ligger i planet. Vi låter $A = (1, 0, -1)$ och

$B = (2,1,-1)$ och $C = (1,1,1)$. Vektorerna $\vec{AB} = B - A = (1,1,0)$ och $\vec{AC} = C - A = (0,1,2)$ ligger i planet och normalen fås som

$$\mathbf{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2,-2,1)$$

Låt $\mathbf{r} = (x,y,z)$ beteckna en godtycklig punkt i planet och sätt $\mathbf{r}_0 = A = (1,0,-1)$. Ekvationen för planet kan då skrivas

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \\ \iff \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 = 0 \\ \iff 2x - 2y + z - (2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)) = 0 \\ \iff 2x - 2y + z = 1 \end{aligned}$$

7. Vi börjar med att skriva om linjen på vektorparametrisk form. Vi får då $\mathbf{r} = (1,-3,2) + t(4,-2,4)$. Linjen ligger i planet om riktningsvektorn för linjen $\mathbf{v} = (4,-2,4)$ är vinkelrät mot planets normal som ges av $\mathbf{n} = (1,-2,A)$. De två vektorerna är vinkelräta om skalärprodukten är noll, dvs.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \iff (1,-2,A) \cdot (4,-2,4) = 0 \\ \iff 4 + 4 + 4A = 0 \\ \iff A = -2. \end{aligned}$$

Vi får alltså planets ekvation till $x - 2y - 2z = 3$ och genom insättning av linjens koordinater ser vi att $(1+4t) - 2(-3-2t) - 2(2+4t) = 3$, dvs. planets ekvation är uppfylld för alla värden på t och linjen ligger därmed i planet.

8. Enligt definitionen av kryssprodukt är längden $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\theta$, där θ är den mellanliggande vinkeln. Vi kan därför skriva

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \sin^2\theta = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2(1-\cos^2\theta) = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\cos^2\theta = \\ &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \end{aligned}$$

där den sista likheten följer ur $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$.