Lösningar till tentamen för MVE460

Fredag den 23:e augusti 2019, $14^{00} - 18^{00}$

1. Se kurslitteraturen (Adams s. 581).

2. Se kurslitteraturen (Adams s. 111).

3. Låt $f(x) = \frac{x}{2+x^2}$. Vi börjar med att bestämma definitionsmängd, och noterar att nämnaren är definierad och skild från noll för alla reella tal. Likaså är täljaren definierad för alla reella tal. Vi har alltså att $D_f = \mathbb{R}$.

Lodräta asymptoter. Eftersom nämnaren är nollskild i hela $\mathbb{R}$ existerar inga lodräta asymptoter.

Vågräta asymptoter. Vågräta asymptoter ges av gränsvärden då $x \to \pm\infty$. Vi börjar med att undersöka $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1/x)}{x^2(2/x^2+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{2/x^2+1} = 0$$

eftersom täljaren går mot noll då $x \to \infty$. Alltså har vi den vågräta asymptoten $y = 0$ då $x \to \infty$.

Vi undersöker nu $x \to -\infty$, och får på liknande sätt:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1/x)}{x^2(2/x^2+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1/x}{2/x^2+1} = 0$$

Det betyder att $y = 0$ är en lodrät asymptot också då $x \to -\infty$.

Sneda asymptoter. Eftersom vi har visat att vågräta asymptoter existerar då $x \to \pm\infty$ så vet vi att inga sneda asymptoter existerar.

Kritiska punkter. Vi har att

$$f'(x) = \frac{1(2+x^2) - x2x}{(2+x^2)^2} = \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$$

Kritiska punkter ges av

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 0 \\
\iff &\frac{2-x^2}{(2+x^2)^2} = 0 \\
\iff &2 - x^2 = 0 \\
\iff &x = \pm\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Inflektionspunkter. Vi har att

$$f''(x) = \frac{-2x(2+x^2)^2 - (2-x^2)2(2+x^2)2x}{(2+x^2)^4} = \frac{2x^3-12x}{(2+x^2)^3}$$

Möjliga inflektionspunkter ges av

$$\begin{aligned}
&f''(x) = 0 \\
\iff &\frac{2x^3-12x}{(2+x^2)^3} = 0 \\
\iff &2x^3 - 12x = 0 \\
\iff &x = 0 \text{ eller } \pm\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Teckentabell. Vi gör nu en teckentabell med följande intressanta punkter: $-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{6}$. För att förenkla beräkningarna skriver vi:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= = \frac{-(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(2+x^2)^2} \\
f''(x) &= = \frac{2x(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})}{(2+x^2)^3}
\end{aligned}$$

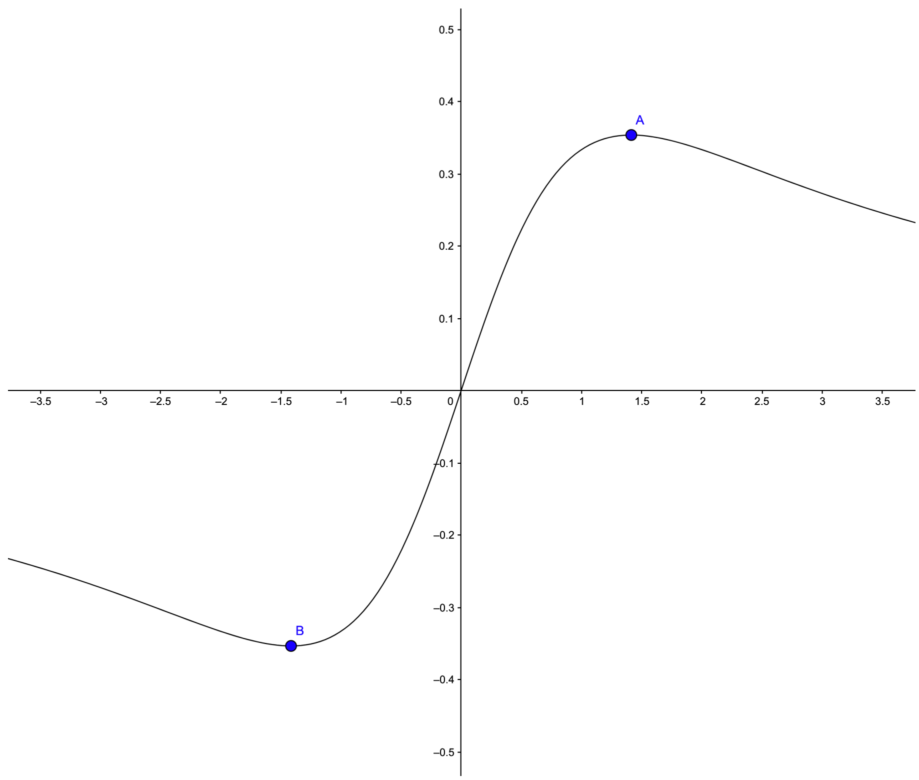
x		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{6}$	
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$-1/2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$1/2\sqrt{2}$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Från tabellen ser vi att $x = -\sqrt{2}$ är ett lokalt minimum och $x = \sqrt{2}$ är ett lokalt maximum. Eftersom vi vet att $f(x) \to 0$ då $x \to \pm\infty$, så kan vi dra slutsatsen att funktionens minsta värde antas i $x = -\sqrt{2}$ och ges av $f(-\sqrt{2}) = -1/2\sqrt{2}$ och att det största värdet antas i $x = \sqrt{2}$ och ges av $f(\sqrt{2}) = 1/2\sqrt{2}$.

Derivatans tecken visar att funktionen är växande på $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ och avtagande på $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$.

Andraderivatans tecken visar att funktionen är konvex på $[-\sqrt{6}, 0] \cup [\sqrt{6}, \infty)$ och konkav på $(-\infty, -\sqrt{6}] \cup [0, \sqrt{6}]$.

Vi skissar nu grafen med hjälp av ovanstående information (se nedan).



4. Låt $f(x) = \ln(\cos(x))$. För att beräkna Taylorpolynomet till f av 4:e ordningen kring $x = 0$ måste vi derivera fyra gånger och utvärdera derivatorna i $x = 0$. Vi får då:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(\cos(x)) \Rightarrow f(0) = \ln(1) = 0 \\
f'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} &= -\tan(x) \Rightarrow f'(0) = 0 \\
f''(x) &= -\frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow f''(0) = -1 \\
f'''(x) &= -\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} \Rightarrow f'''(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) = -2\frac{\cos^4(x) + \sin^2(x)\cos^2(x)}{\cos^6(x)} &\Rightarrow f^{(4)}(0) = -2
\end{aligned}$$

Taylorpolynomet ges nu av:

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 = [a=0] = \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4
\end{aligned}$$

5. Vi börjar med att göra variabelbytet $y = 1/x$. Då $x \to \infty$ så $y \to 0^+$. Detta ger:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} = \lim_{y\to 0^+} y^y = \lim_{y\to 0^+} e^{\ln(y^y)} = \lim_{y\to 0^+} e^{y\ln y} = e^0 = 1$$

enligt det kända gränsvärdet $\lim_{y\to 0} y \ln y = 0$.

6. Vi börjar med att ta fram planets normalvektor $\mathbf{n}$. Denna fås som kryssprodukten mellan vektorerna $\mathbf{u} = (1,1,1)$ och $\mathbf{v} = (-2,0,2)$ som ligger i planet:

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, -4, 2).$$

Vektorn $\mathbf{w} = (-1, 2B, 4A)$ är vinkelrät mot planet om den är parallell med $\mathbf{n}$, dvs. $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{n}$ för någon konstant $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi har alltså att

$$(-1, 2B, 4A) = \lambda(2, -4, 2)$$

Genom att jämföra den första komponenten i höger- och vänsterled ser vi att $\lambda = -1/2$. Den andra komponenten säger att $2B = 2$, dvs. $B = 1$, och den tredje säger nu att $4A = -1$, vilket medför att $A = -1/4$.

7. För att beräkna planets ekvation beräknar vi normalen genom att ta kryssprodukten mellan två vektorer som ligger i planet. Vi låter $A = (3, 1, 0)$ och $B = (1, 1, -1)$ och $C = (1, 0, 1)$. Vektorerna $\vec{AB} = B - A = (-2, 0, -1)$ och $\vec{AC} = C - A = (-2, -1, 1)$ ligger i planet och normalen fås som

$$\mathbf{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 4, 2)$$

Låt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ beteckna en godtycklig punkt i planet och sätt $\mathbf{r}_0 = A = (3, 1, 0)$. Ekvationen för planet kan då skrivas

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= 0 \\ \iff \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 &= 0 \\ \iff -x + 4y + 2z - ((-1) \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) &= 0 \\ \iff -x + 4y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

8. Vi börjar med att skriva om ekvationssystemet som en utökad koefficientmatris:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 3A \end{bmatrix}.$$

Vi byter sedan plats på nedersta och översta raden

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3A \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

och skapar nollor i första kolumnen genom att multiplicera första raden med -1 och lägga till andra raden och multiplicera första raden med 2 och lägga till tredje raden:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3A \\ 0 & 4 & 2 & -3A \\ 0 & 0 & 0 & 6A + 2 \end{bmatrix}.$$

Vi ser från tredje raden att systemet är konsistent om och endast om $6A + 2 = 0$, dvs. $A = -1/3$.

Då $A = -1/3$ får vi systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi delar andra raden med 4 och får

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi radreducerar uppåt genom att multiplicera andra raden med 2 och lägga till den första:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta är ekvivalent med att

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 - 2x_3 = -1/2 \\ 0x_1 + x_2 + x_3/2 = 1/4. \end{cases}$$

Vi sätter $x_3 = t$ och får då att $x_2 = 1/4 - t/2$ och $x_1 = -1/2 + 2t$. Denna lösningsmängd svarar mot en linje med ekvation $\mathbf{r} = (-1/2, 1/4, 0) + t(2, -1/2, 1)$ för $t \in \mathbb{R}$.