Begrepp, Satser, Typiska problem för kursen MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning 2017

Begrepp och beteckningar	Satser och viktiga egenskaper och metoder	Typiska problem
Primitivfunktion-obestämd integral A 2.10, s, 149	Variabelsubstitution i primitivfunktion: direkt variabelsubstitution, s. 319 $u = w(x)$ för integraler $\int f\big(w(x)\big)w'(x)dx$ och inversa variabelsubstitution, s. 347 $x = g(u)$ för integraler $\int f(g^{-1}(x))dx$. Partiellintegration: $\int udv = uv - \int vdu$ Partiell bråksuppdelning: enkelt fall, s. 341, allmänt fall, Sats 6.2.1, s. 345	Beräkna primitiva funktioner med hjälp av: 0) tabelintegraler i) enkel variabelsubstitution ii) partiell integration ii) inversa variabelsubstitutioner $x = \sin(\alpha)$ och $x = \tan(\alpha/2)$ iii) partiellbråksuppdelning och tabellintegraler
Summabeteckning Σ,σ. 289, Riemanns summa, s. 303, övre och undre Riemanns summor, s. 300. Bestämd integral och dess geometriska mening. S. 302. Arean under en graf.	Medelvärdessatsen för bestämd integral 5.4.4, s. 308, (med bevis) Integralkalkulens huvudsats (Newton-Leibnitz sats) 5.5.5, s. 311, (med bevis)	Skriva en undre eller övre summa för en enkel (monoton) funktion. Beräkna en bestämd integral med hjälp av Newton-Leibnitz's sats.
Generaliserade integraler över obegränsade intervall och generaliserade (singulära) integraler av obegränsade funktioner., s. 362, 363. Konvergenta och divergenta generaliserade integraler.	Variabelsubstitution i bestämd integral. Sats 5.6.6, s. 320 (med bevis) Partiell integration i bestämd integral. Sats 6.5.3, s. 366. Kriterier för konvergens och divergens av generaliserade integraler med hjälp av jämförelse med testintegraler.	Beräkna en bestämd integral med hjälp av Integralkalkulens huvudsats och olika metoder för att beräkna primitiva funktioner. Ange om en singulär integral är divergent eller konvergent och beräkna den i andra fallet.
Figurer i planet begränsade av flera kurvor och axlar: dess area med hjälp av Riemanns sumor.	Formler för arean av figurer i planet begränsade av flera kurvor och axlar.	Rita en figur i planet som är begränsad av flera kurvor och axlar. Beräkna arean av en figur i planet begränsad av en eller flera kurvor eller axlar
Begreppet volum av en rotationskropp: med hjälp av skivor och med hjälp av cylindriska skal (bilder i A. s. 395, 396.)	Formler för volum av rotationskropp med hjälp av skivor, s. 393 och med hjälp av cylindriska skal, s. 396.	Beräkna volum av en rotationskropp begränsad av en eller flera kurvor roterade runt en axel.
Längden av en kurva kurva given som graf av en funktion. A 7.3, s. 404	Formeln för längden av en kurva s. 404	Beräkna längden av en kurva definierad som graf till en funktion.
Arean av rotationsyta uppbygd med rotation av en kurva runt en axel. A 7.3, s. 408	Formler för arean av en rotationsyta: s. 409.	Beräkna arean av en rotationsyta .
Ordinära differentialekvationer – ODE Ordningen av ODE, linjära ODE, s. 991. Begynnelsevärdesproblem för ODE och för system av ODE, s. 999.	Metoder för att lösa ODE med separabla variabler, s. 447. Metoden för att lösa en linjär ODE av första ordningen, s. 450: $$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$	Ange allmän lösning till en ODE av första ordningen som är linjär av första ordning, eller har separabla variabler. Lös begynnelsevärdesproblem för en ODE av första ordningen av samma typ som ovan.
	En lämplig formel för att lösa begynnelse-värdesproblem för linjära första ordningens ODE- är given i höger.	$$y(x) = exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)ds\right)\left[y(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\, exp\left(\int_{x_0}^{s} p(t)dt\right)ds\right]$$
	Satsen 8.1.2, s. 992, om allmänna lösningar till inhomogena linjära ODE (med bevis). Recept för allmänna lösningar till homoghena linjära ODE av andra ordningen med konstanta koefficienter: ay''+by'+cy=0, A 3.7, s. 205-206. Recept för allmän lösning till icke homogena	Ange allmän lösning till homogen eller inhomogen linjär ODE av andra ordningen med konstanta koefficienter. Lös ett begynnelsevärdesproblem för an ODE av en av dessa typer.

Begrepp, Satser, Typiska problem för kursen MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning 2017

	ODE av samma typ, s. 1017. ay''+by'+cy=g(x) Metoden för partikulära högerled: g(x)=P(x)exp(rx), g(x)=P(x)exp(rx)cos(kx) g(x)=Q(x)exp(rx)sin(kx)	
Komplext tal, dess reella och imaginära delar, A-11. Konjugat till ett komplext tal, Absolut belopp av ett komplext tal. Komplext tal i polär form: absolut belopp och argument. Appendix I.	Beräkningsregler för komplexa tal, s. A-5 Multiplikation av komplexa tal i polär form, s. A6 Formeln för exponentiell funktion av ett komplext tal $z = a + ib$ på s. A-15: $\exp(x+iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$ Kommentar till algebrans huvudsats, s. A-18: varje polynom $P(z)$ av grad n har n komplexa rötter (räknade med multiplicitet): $P(z) = c(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\dots(z-\lambda_n)$	Man måste kunda använda beräkningar med komplexa tal i olika sammanhang: beräkna komplexa rötter av andragradspolynom, komplexa egenvärden, kunna lösa ekvationer för komplexa egenvektorer för matriser 2x2, identifiera reella och imaginera delen av kvoten av två komplexa tal.

Begrepp och beteckningar	Satser och viktiga egenskaper och metoder	Typiska problem och några lämpliga formler
Begrepp från Lay 1.1, 1.2. Linjära ekvationssystem, koefficientmatris, utvidgad matris, Gausselimination, s.31 trappstegsform, s.29 reducerad trappstegsform s. 29 pivotelement, s.30, fri variabel, s.34	Metoden med Gauss elimination (row reduction algorithm): framåt fas s. 31, och bakåt substitution, s. 35. Resonemang för att bestämma ifrån utvidgad trappstegsmatris om ett ekvationssysten är lösbart, om det har en entydig lösning eller oändligt många lösningar där basvariabler är framställda med hjälp av fria variabler. s. 37	Gör Gauss elimination på en koefficient-matris, eller på utvidgad matris till ett linjärt ekvationssystem och får fram trappstegsmatris eller reducerad trappstegsmatris. Lös ett ekvationssystem, homogent eller inhomogent. Till exempel Exempel 4, s. 34-35.
Lay 1.3, 4.1 Vektorrum s. 208, vektorer i R^n, s. 43, Vektorekvation, s. 46 injärkombination av vektorer $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$ ur R^n, s. 46 linjära höljet/spannet $Span\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$	Algebraiska egenskaper av R^n: beräkningsregler för vektorer, s. 43. $Span\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$ är ett underrum i R^n Geometrisk mening med $Span\{v_1\}$ och $Span\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ för vektorer $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in R^3$, s. 46	Beräkna linjär kombination av en uppsättning vektorer. Bestäm om tre plan har en gemensamm punkt, oändligt många gemensamma punkter. Kolla supplementary exercises in Kap. 1: 3, 6, 8, 17, s. 105-106
Lay 1.4 Matris – vektor produkt Ax, s. 51 Matrisekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. s. 52 Sats 1.4.3, s. 52 om ekvivalensen mellan vektorekvation och matrisekvation	Rad-vektor multiplikationsregel för Ax, s. 54. Sats 1.4.4, s. 53 om några påståenden ekvivalenta med lösbarheten av systemet $Ax = b$ (med bevis) Sats 1.4.5, s. 55 om linjäritet av matris - vektor produkt. (med bevis)	Beräkna matris-vektor produkt. Beräkna ett uttryck med flera matris produkter blandade med matris och vektor addition: t.ex. $(A + 2B)(3\boldsymbol{v} - C\boldsymbol{w})$ med matriser A, B, C och vektorer $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$.
Lay 1.7. Linjärt oberoende och linjärt beroende uppsättningar vektorer s. 73	Huvudsats om linjärt beroende vektorer: Sats 1.7.7 , s. 75, s.77 om karakterisering av linjärt beroende uppsättningar vektorer Sats 1.7.8, s. 76. Om det är mera vektorer ur R^n i en uppsättning än antalet element n i varje vektor, så är de linjärt beroende.	Bestäm om en uppsättning vektorer är linjärt beroende eller oberoende med hjälp av Gauss elimination

Begrepp, Satser, Typiska problem för kursen MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning 2017

Lay 1.8, 1.9. Linjära transformationer (avbildningar) s. 82 Standardmatrisen för en linjär avbildning, s. 88 Surjektiva (onto) transformationer (avbildningar), s. 92. Injektiva (one to one) transformationer (avbildningar), s. 92-93	Sats 1.9.10, s. 88 om standardmatris till en linjär transformation. (med bevis). Exempel 3, s. 89 om rotationstransformation Sats 1.9.11 , om injekltiva linjära transformationer. s. 94 Sats 1.9.12 , om surjektiva och injekltiva linjära transformationer. s. 94	Ange standardmatrisen till en linjär avbildning given av en formel eller med beskrivning av dess geometriska egenskaper. Bestäm formen av en triangel efter en linjär transformation. Bestäm om en linjär transformation är surjektiv eller injektiv, och om den är inverterbar.
Lay 2.1. Matrisaddition och multiplikation med reella tal, s.110 Standardmatris till sammansatta linjära transformationer. s. 112-113 Matrisprodukt, s. 113 Enhetsmatris, s.115 Transponat av en matris, s.117	Sats 2.1.1, s.111. Egenskaper hos matris-addition och multiplikation med reella tal. Sats 2.1.2, s.115. Egenskaper hos matrismultiplikation. Del a) – associativa lagen för matrismultiplikation: $A(BC) = (AB)C$ (med bevis) Sats 2.1.3, s. 117 egenskaper hos transponat matris	Förenkla ett uttryck med matris-multiplikation och addition: både för matriser och för allmänna matris uttryck. Formeln för ett godtyckligt element C_{ir} i matrisprodukten $C = AB$, för matriser $A\ (m{\times}p)$, $B\ (p{\times}n)$, $C\ (m{\times}n)$: $C_{ir} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}\, B_{kr}$, s.114
Lay 2.2. Inversen till en kvadratisk matris $AA^{-1} = I$, och $A^{-1}A = I$, s. 121 Standard bas $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_p\}$ i R^n, s.166	Sats 2.2.6 a), b), c) , s. 123 om räknelegler för inversa matriser. del b): $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ – (med bevis) Sats 2.2.7, s. 325. Matris A är inverterbar om och endast om A är radekvivalent med enhetsmatris. (med bevis) Sats 2.3.8, s. 130 om flera påståenden ekvivalenta med att matrisen A är inverterbar. Sats 2.3.9, s. 132 om inverterbara linjära transformationer.	Bestäm om en matris är inverterbar. Beräkna inversen till en matris med Gauss elimination. Sats 2.2.4, s.121 med explicit formel för inversen av matris av storlek $2{\times}2$: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ Bestäm om en linjär transformation är inverterbar.
Lay 2.8, 4.1. Underrum i ett linjärt rum s. 211, Underrum i R^n, s.164. Kolonnrum, s.165, nollrum s. 166. Bas för ett underrum s. 166. rank av en matris	Sats 2.8.13 om bas för kolonnrummet för en matris och dess pivotkolonner. s. 168	Bestäm bas av kolonnrumet för en matris Bestäm bas av nollrummet för en matris Bestäm bas för spannet $Span\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$ av en uppsättning vektorer$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$.
L. 2.9. Koordinater med avseende på en bas. s. 172 Dimension av ett underrum, s. 173 Rank av en matris, s. 173	Rank sats_ 2.9.14, s. 174 Sats 2.9.15, s. 174 om p linjärt oberoende vektorer i ett underrum av dimension p.	Bestäm rank av en matris. Bestäm dimension av nollrummet av en matris i fall man kan rank av matrisen.
Determinant, s. 183 Kofaktor expansion, s. 184	Linearitetsegenskap för determinanter, s. 191 Egenskaper hos determinanter. Sats 3.2.3, s.187 om radoperationer på determinanter. Determinat av transponat: $\det A^T = \det A$; Determinant av produkt av två matriser $\det(AB) = \det A \det B$ Sats 3.2.4 Matris A är inverterbar om och endast om $\det(A)$ är icke noll.	Beräkna en determinant med hjälp av radoperationer eller med explicita formeln för mindre storlekar $2{\times}2$ och $3{\times}3$. Beräkna volum av en parallelepiped byggd på tre vektorer, eller arean av en parallelogram eller triangel byggd på två vektorer med hjälp av en determinant.
Beteckningen: $A_i(b) = [a_1, \dots, b, \dots, a_n]$, s. 195	Cramers regel: Sats 3.3.7, s. 195 för lösningen av ett system med inverterbar $n{\times}n$ matris: $Ax = b$ på formen: $x_i = \frac{detA_i(b)}{detA}$ där $A_i(b) = [a_1, \dots, b, \dots, a_n]$	Lös ett ekvationssystem $Ax = b$ med inverterbar matris A med hjälp av Cramers regel, eller bestäm ett komponent i lösning med den. Exercise 3.3 - nummer 1,3, 5 i Lay

Begrepp, Satser, Typiska problem för kursen MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning 2017

Egenvektorer, egenvärden, s. 285 Karakteristisk ekvation, s. 294	Egenvektorer i en triangulär matris är elementen som står på diagonalen av matrisen, s. 287 Egenvektorer som svarar mot distinkta egenvärden är linjärt oberoende. Sats 5.1.2, s. 288.	Bestäm egenvärden för en matris av storlek 2×2 eller 3×3. Bestäm egenvektorer för en matris av storlek 2×2 eller 3×3.
Diagonalisering av en matris, s. 300	Sats 5.3.5, s. 300: En $n\times n$ matris A är diagonaliserbar om och endast om den har n linjärt oberoende egenvektorer. Sats 5.3.6, s. 302: En $n\times n$ matris A med n olika egenvärden är diagonaliserbar.	Bestäm om en matris av storlek 2×2 eller 3×3 är diagonaliserbar (bara i fall man kan lätt beräkna egenvärden eller egenvärden är givna). För en given matris A hitta en inverterbar matris P och en diagonal matris D så: $P^{-1}AP = D$.
Riktningsfält, fasportrett till ett system ODE av första ordningen i planet. (kolla beskrivning av Laboration 6 och Exempel 1,2,3, i kap. 5.7 på sidor 330, 332, 334 Variabelbyte i linjära system ODE av första ordningen (Decoupling a dynamical system i kursboken s. 333)	Exempel 1,2,3 i kapitel 5.7 på sidor 330, 332, 334. om linjära system ODE med konstanta koefficienter i planet. Metoden med variabelbyte i linjära system ODE av första ordningen i fall med distinkta egenvärden, s. 333.	Bestäm allmän lösning till ett homogent system linjära ODE av första ordningen med konstanta koefficienter, alternativt lös ett begynnelsevärdes-problem för ett sådant system. Ex. 1, 2 i sec. 5.7 Bestäm vilken typ har origo för ett system linjära ODE i planet: attractor, repeller, sadelpunkt, spiralpunkt som i Exercises 5.7 , 3– 5 (reella egenvärden) och 9-13 (komplexa egenvärden) , s. 336
Skalär produkt (inre produkt), s. 348 Längden av en vektor, s. 348. Ortogonala vektorer, s. 352. Ortogonala komplementet $W^{\perp}$ till ett underrum W, i R^n, s. 352. Ortogonal uppsättning (mängd) vektorer, s. 356 Ortogonal bas, s. 352 Ortogonal projektion på en vektor u, s. 358 Ortogonal projektion $proj_W v$ av en vektor v på ett underrum W, s. 366 Ortonormal bas, s. 360, Ex. 3, s. 374	Fredholm satsen- Satsen 6.1.3, s. 353 om kolonrummet och nollrummet av en matris A och dess transponat A^T: $(Col\ A)^{\perp} = Nul\ A^T$ och $(RowA)^{\perp} = Nul\ A$ Mest användbart kriterium för lösbarhet av linjära system Ax=b följer härifrån. Nämligen : Ax=b har en lösning om och endast om b är vikelrät mot $Nul(A^T)$. Sats 6.2.4, s. 356. Om att en ortogonal uppsättning vektorer bildar en bas för dess spann. Satsen 6.3.8, s. 666 om ortogonal dekomposition av R^n i ett underrum Woch dess ortogonala komplementet $W^{\perp}$. Formeln (2), s. 366. i den satsen för projektion $proj_W v$ av en vektor v på ett underrum W. Satsen 6.3.9, s. 368 om att projektionen är bästa approximationen i ett underrum W för en godtycklig vektor ur R^n . Formeln för projektion med ortonormal bas: Satsen 6.3.9 s. 369.	Beräkna projektion av en vektor på spännet av en ortogonal upsättning vektorer. Beräkna projektion av en vektor på ett underrum som är spannet av flera givna vektorer. Ange ortogonala komplementet till ett underrum som är spannet av givna vektorer. Beräkna avståndet mellan en punkt och ett underrum som är spannet av givna vektorer. Använd satsen 6.1.3 (Fredholms sats) för att bestämma om ett linjärt system $Ax = b$ är lösbart. Exercises 11, 13 i sektion 1.3, sid 48, och Exercise 15 i sektion 1.4 , sid. 57, kan lösas med hjälp av Fredholms sats. Practice problem 3 i sektion 1.5, s. 59 är också ett bra exempel.
	Gram – Schmidt metoden för att bygga en ortogonal bas: Example 2, s. 372, Satsen 6.4.11, s. 373.	Bestäm en ortogonal bas från en given bas och med hjälp av Gram Schmidt metoden.
Minstakvadratlösning, s. 378.	Satsen 6.5.13, s. 379 om minstakvadratlösning.	Bestäm minstakvadratlösning till ett system Ax=b Anpassa en linje till en liten mängd experimentalla data med minstakvadrtmetoden. Sect. Sect. 6.6, Exercises 1-3, 9
Symmetriska matriser: $A = A^T$ ortogonala matriser: $P^T = P^{-1}$ Spektral dekomposition för en symmetrisk matris, s. 416. Projektionsmatris $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i{}^T$, s. 418	Egenvectorer till distinkta eigenvärden för en symmetrisk matris är ortogonala. Sats7.1.1, s. 413. Matris A är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om den är symmetrisk, Sats 7.1.2, s. 413. Spectral sats. Sats 7.1.3, s. 415. Symmetriska $n\times n$ matriser A har följande	Ortogonalt diagonalisera en (liten) symmetrisk matris. 7.1, Exercises 13-19, 23. Ange spektral dekomposition av en (liten) symmetrisk matris. 7.1, Exercises 33,34.

	egenskaper: a. A har n reella egenvärden om man räknar multiplicitet. b. Dimension av ett egenrum är lika med multiplicitetet av motsvarande egenvärde. c. Egenrum är ortogonala mot varandra. d. A är ortogonalt diagonaliserbar. Formeln (2) s. 416 för spektral dekomposition av en symmetrisk matris med ortonormala egenvektorer: $A = \lambda_1 u_1 u_1{}^T + \lambda_2 u_2 u_2{}^T + \cdots + \lambda_n u_n u_n{}^T$	

Satser som kommer på tentan med bevis.

Adams:

- Sats 5.6.6, s. 320. Variabelsubstitution i bestämd integral: direkt variabelsubstitution u=w(x) för integraler $\int f\big(w(x)\big)w'(x)dx$.
- Sats 5.4.4, s. 308: Medelvärdessatsen för bestämd integral.
- Sats 5.5.5, s. 311: Integralkalkulens huvudsats (Newton-Leibnitz satsen).
- Satsen om strukturen av allmänna lösningar till inhomogena linjära ODE.
  Den påstår att allmän lösning till en inhomogen linjär ODE kan representeras som summa av allmän lösning till homogena varianten av den ODE och en godtycklig partikulär lösning till inhomogena ODE.
  (fullständig formulering och bevis var givet på föreläsning och länken till dem finns på hemsidan),
  Satsen 8.1.2, s. 992 i Adams innehåller en reducerad formulering av den satsen, som bara säger att summan av en lösning till homogena ekvationen och en partikulär lösning till inhomogena ekvationen blir lösning till inhomogena ekvationen.

Lay:

- Sats 1.4.4, s. 53: Några ekvivalenta påståenden om linjära ekvationssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
- Sats 1.4.5, s. 55: Om linjäritet av matrisaddition och multiplikation med skalärer: $A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v}$, $A(c\boldsymbol{u}) = cA\boldsymbol{u}$.
- Sats 1.5.6, s. 63: Beskrivning av lösningarna till inhomogena linjära system.
- Sats 1.9.10, s. 88: Om standardmatris för linjära avbildningar.
- Sats 2.1.2 a), s. 115. Associativa lagen för matrisprodukt: $A(BC) = (AB)C$.
- Sats 2.2.6 b), s. 123. Om inversen till produkten AB av två inverterbara matriser A och B:

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Sats 2.2.7, s. 125. Matrisen A , $n \times n$ är inverterbar om och endast om den är radekvivalent med enhetsmatrisen (identitetsmatrisen) av samma storlek.
- Sats 5.3.5, s. 300. Om ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att en matris är diagonaliserbar.
- Sats 6.2.4, s. 356. Om att en ortogonal uppsättning vektorer bildar en bas för dess spann.