Kriterier för inverterbara matriser

Sats 2.2.5. sid.122
Två följande påståenden är ekvivalenta:
1) En $n \times n$ matris A är inverterbar (har invers A^{-1})
2) Ekvationen $Ax = y$ har en entydig lösning för varje vektor $y \in \mathbb{R}^n$.
Bevis.
Vi visar först att 1) medför 2).
Betrakta vektorn $x = A^{-1}y$. Multiplicera den likheten från vänster med matris A.
Vi får att $Ax = A\left(A^{-1}y\right)$.Tillämpa associativa lagen för mastrisprodukt: $(AB)\,C = A\,(BC)$ till sista ekvationen: $Ax = \left(AA^{-1}\right)y$ och använd att $AA^{-1} = I$ och att $IC = C$ för vilken som helst matris C inklusive kolonnvektorn y. Detta medför att $Ax = (I)\,y = y$ och att $x = A^{-1}y$ är en lösning till ekvationen $Ax = y$.

Metoden med Gauss elimination medför att man får en lösning till ekvationen $Ax = y$ för varje $y \in \mathbb{R}^n$ om och endast om trappstegsmatrisen för matrisen A har ett pivotelement i varje rad som här:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

Men i fall med en kvadratisk matris A är antalet rader och kolonner samma, och är lika med n. Det betyder att alla n pivot positioner måste ligga på diagonalen och alla kolonner i A är pivotkolonner:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

Detta är ekvivalent med att det inte finns några fria variabler och att ekvationen $Ax = y$ har entydiga lösningar för godtyckliga $y \in \mathbb{R}^n$. Vi är klara med implikation från 1) till 2).

Nu tar vi andra delen av beviset: visar att 2) medför 1). Vi skall försöka lösa matrisekvationen som $A^{-1} = B$ måste uppfylla: $AB = I$. Den matrisekvationen är ekvivalent med n stycken vanliga linjära system för kolonnerna i B: $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$

$$Ab_1 = e_1, \quad Ab_2 = e_2, ..., Ab_n = e_n$$

där $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ är kolonnerna i enhetsmatrisen I. Om ekvationen $Ax = y$ har en entydig lösning för varje $y \in \mathbb{R}^n$ så har varje av dessa ekvationer en entydig lösning. Matrisen B byggd av kolonnvektorer $B = [b_1, b_2, ..., b_n]$ på det viset uppfyller villkoret $AB = I$ i definitionen för inversa matrisen: $AA^{-1} = I$. Så B är inversen: $B = A^{-1}$. Andra villkoret $A^{-1}A = I$ i kursboken följer från att $AA^{-1} = I$. $\blacksquare$

Vi lägger märke till att villkoret 2) är enligt Gauss' elimination, ekvivalent med att trappstegsmatrisen till matrisen A måste ha n pivotelement på diagonalen, och inga fria variabler, som på bilden ovan.

Sats 2.2.7 sid.125

En $n \times n$ matris A är inverterbar (har inversa matris A^{-1}) om och endast om ($\Longleftarrow$ ... $\Longrightarrow$) den är radekvivalent med enhetsmatris av samma storlek. Samma Gauss radoperationer som reducerar A i I , transformerar också I i A^{-1}.

Bevis.

Betrakta först beviset i direkt riktning $\Longrightarrow$:

Det att matrisen A är inverterbar medför enligt sats 2.2.5 att linjära systemet $Ax = y$ har en entydig lösning för varje $y \in \mathbb{R}^n$. Detta är enligt Gauss elimination, ekvivalent med att trappstegsmatrisen till A måste ha n pivotelementn på diagonalen av matrisen, och att inga fria variabler finns. Kolla bilden ovan.

Observera sedan att om man genomför Gauss elimination vidare på den trappstegsmatrisen med n pivåtelement på diagonalen, så får man en reducerad trappstegsmatris till A som är enhetsmatrisen I:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Så en inverterbar matris A måste vara radekvivalent med enhetsmatris av samma storlek.

Beviset i motsatta riktningen $\Longleftarrow$:

Det att A är radekvivalent med enhetsmatris medför att Gauss elimination på utvidgade matrisen $[A|y]$ löser matrisekvationen $Ax = y$ för godtycklig vektor $y \in \mathbb{R}^n$. Med att välja n olika vektorer y som kolonner $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ur enhetsmatrisen I, får vi n linjära ekvationssytem

$$Ab_1 = e_1, \quad Ab_2 = e_2, ..., Ab_n = e_n$$

Enligt definitionen på matrisprodukt är dessa n ekvationer för kolonnerna $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ ekvivalenta med matrisekvationen

$$AB = I$$

som skulle gälla för för inversa matrisen $B = A^{-1}$. Detbetyder att matrisen B med kolonnerna $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ är inversa matris A^{-1} till A och vi har bevisat satsen i motsatta riktningen.

Resonemanget i slutet visar också att om vi genomför Gauss elimination på utvidgade matrisen $[A|I]$ så får vi efter andra steget i Gauss elimination en matris $\left[I|A^{-1}\right]$ med enhetsmatris i vänster och inversa matrisen A^{-1} i höger. Samma Gauss radoperationer som reducerar A i I , transformerar I i A^{-1}.$\blacksquare$