

Tenta i MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning. K/Bt/Kf

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättast, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

1. Integraler och primitiva funktoner.

a) Beräkna $\int x \sin^2(x) dx$. **(2p)**

b) Beräkna $\int_0^2 \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)}$. **(3p)**

Lösning.

a) $\int x \sin^2(x) dx = \int x \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) dx = \int \frac{x}{2} dx - \frac{1}{2} \int x \cos(2x) dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \int x d \sin(2x) =$
 $\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin(2x) + \frac{1}{4} \int \sin(2x) dx =$
 $\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{4} x \sin 2x + C.$

b) Partiellbråksuppdelning ger: $\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}$;

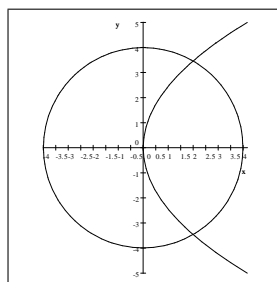
$$\int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{2x+1} dx = \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y+1} dy = \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(2x+1)$$

$$\int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)} = \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C$$

Integralkalkulens huvudsats medför: $\int_0^2 \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)} = \left[\ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(2x+1) \right] \Big|_0^2 = \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 5$

2. Tillämpningar av integraler.

a) Beräkna arean av figuren i halvplanet $x \geq 0$ som är begränsad av två linjer: cirkeln $x^2 + y^2 = 16$ och parabeln $y^2 = 6x$.

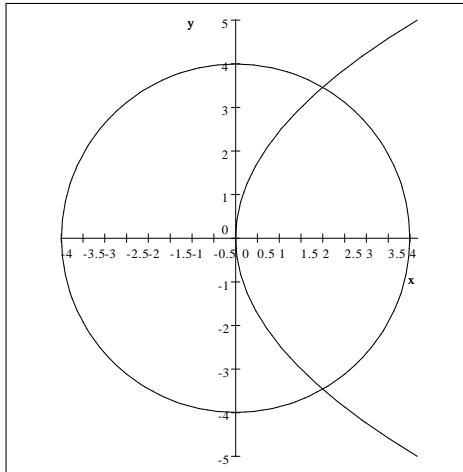


Tips: Det lämpligt att använda variabelbytet av typ $x = a \sin(t)$ i en av integraler som uppstår. **(4p)**

b) Beräkna arean av ytan som är byggd med rotation av grafen till funktionen $y = \sin(x)$ för $x \in [0, \pi]$ runt x -axeln. **(3p)**

Lösning.

a) Skiss av figuren:



Skärningspunkter mellan parabeln och cirkeln bestäms som lösning till system ekvationer $x^2 + y^2 = 16$ och $y^2 = 6x$. Detta som medför att $x^2 + 6x - 16$, och rötter till det polynomet är $x_1 = 2$ och $x = -8$. Roten $x = -8$ är negativ och finns inte på parabeln.

Bilden är symmetrisk med avseende på x axeln. Det räcker att beräkna arean av halvan av figuren. Intervallet för y inom den figuren är $[-\sqrt{6x_1}, \sqrt{6x_1}] = [-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$. Figuren är symmetrisk med avseende på x - axeln, så det räcker att beräkna hälften av arean. Vi delar upp figuren i två intervall för x :

$$\text{Arean} = 2 \int_0^2 \sqrt{6x} + 2 \int_2^4 \sqrt{16 - x^2} dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = 2 \int_0^2 \sqrt{6x} = \frac{8}{3} \sqrt{12} = \frac{16}{3} \sqrt{3}$$

$$I_2 = 2 \int_2^4 \sqrt{16 - x^2} dx;$$

Använd variabelbytet $x = 4 \sin(t)$, $dx = 4 \cos(t) dt$.

$x = 4$ för $t = \pi/2$; $x = 2$ för $t = \pi/6$.

$$I_2 = 2 \int_2^4 \sqrt{16 - 16 \sin^2 t} (4 \cos(t)) dt = 32 \int_2^4 \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos(t) dt = 32 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\cos t)^2 dt = 32 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{16}{3} \pi - 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Arean} = I_2 + I_1 = \frac{16}{3} \pi - 4\sqrt{3} + \frac{16}{3} \sqrt{3} = \frac{16}{3} \pi + \frac{4}{3} \sqrt{3}$$

$$\text{Svar: } \text{Arean} = \frac{16}{3} \pi + \frac{4}{3} \sqrt{3}$$

b) Beräkna arean av ytan som är byggd med rotation av grafen till funktionen $y(x) = \sin(x)$ för $x \in [0, \pi]$ runt x - axeln.

$$\text{Svar: } \text{Arean} = 2\pi \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} + 1) \right)$$

Allmän formel för arean är $\text{Arean} = \int_0^\pi 2\pi y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$. För konkreta funktionen $y(x) = \sin(x)$

$$\text{Arean} = 2\pi \int_0^\pi \sin(x) \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx = -2\pi \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2(x)} d(\cos(x)) = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + y^2} dy = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + y^2} dy$$

Betrakta primitiv funktion:

$$\int \sqrt{1 + y^2} dy = \frac{1}{2} y \sqrt{y^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right).$$

Tillämpning av integralkalkulens huvudsats ger

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+y^2} dy = \left[\frac{1}{2} y \sqrt{y^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left(y + \sqrt{y^2+1} \right) \right] \Big|_{-1}^1 =$$

$$\left[\frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}) \right] - \left[-\frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(-1+\sqrt{2}) \right] = (\sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}+1))$$

och medför svaret.

Primitiva funktioner med $\sqrt{1+y^2}$ beräknas vanligen med hjälp av substitutionen $y = \tan(\theta)$:

$$I = \int \sqrt{1+y^2} dy = \int \sqrt{1+\tan^2(\theta)} d \tan(\theta) = \int \sqrt{1+\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} \frac{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} d\theta = \int \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{1}{\cos^2(\theta)} d\theta =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^3(\theta)} d\theta = \int \sec^3(\theta) d\theta$$

Den primitiva funktionen $I = \int \sec^3(\theta) d\theta$ betraktas i Adams i Example 3 i kapitel 6.1 och reduceras där till standarda integralen

$$\int \frac{1}{\cos(\theta)} d\theta = \int \sec(\theta) d\theta = \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)|$$

med hjälp av partiell integration. Introducera beteckningar:

$$U = \sec(\theta), V = \tan(\theta), dU = \sec(\theta) \tan(\theta), dV = \sec^2(\theta) d\theta.$$

och använd partiell integration i I :

$$I = \int \sec^3(\theta) d\theta = \int U dV = \sec(\theta) \tan(\theta) - \int \sec(\theta) \tan^2(\theta) d\theta = \sec(\theta) \tan(\theta) - \int \sec(\theta) (\sec^2(\theta) - 1) d\theta$$

$$= \sec(\theta) \tan(\theta) - I + \int \sec(\theta) d\theta = \sec(\theta) \tan(\theta) - I + \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)|$$

Integralen I löses ut och ger $I = \frac{1}{2} \sec(\theta) \tan(\theta) + \frac{1}{2} \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)|$. Substitutionen av ursprungliga variabler $y = \tan(\theta)$ och $\sec(\theta) = \sqrt{1+y^2}$ ger

$$I = \frac{1}{2} y \sqrt{1+y^2} + \frac{1}{2} \ln |y + \sqrt{y^2+1}|$$

■

Man kan också beräkna den primitiva funktionen med att göra partiell integration direkt på integralen $\int \sqrt{1+y^2} dy$

och sedan använda att $\int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} dy = \ln \left(y + \sqrt{y^2+1} \right)$:

$$I = \int \sqrt{1+y^2} dy = y \sqrt{y^2+1} - \int y d \left(\sqrt{y^2+1} \right) = y \sqrt{y^2+1} - \int \frac{y^2+1-1}{\sqrt{y^2+1}} dy = y \sqrt{y^2+1} -$$

$$\int \sqrt{y^2+1} dy + \int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} dy$$

$$= -I + y \sqrt{y^2+1} + \int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} dy.$$

I löses ut: $2I = y \sqrt{y^2+1} + \int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} dy$.

Den sista primitiva funktionen är bra att kunna: $\int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} dy = \ln \left(y + \sqrt{y^2+1} \right)$.

Den är ekvivalent med standarda primitiva funktionen $\int \frac{1}{\cos(\theta)} d\theta = \int \sec(\theta) d\theta = \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)|$ genom samma variabelsubstitution $y = \tan(\theta)$ som ovan:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} dy = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} d(\tan(\theta)) = \int \cos(\theta) \frac{1}{\cos^2(\theta)} d\theta = \int \frac{1}{\cos(\theta)} d\theta = \int \sec(\theta) d\theta =$$

$$\ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| = \ln \left(y + \sqrt{y^2+1} \right)$$

3. Differentialekvationer.

a) Lös begynnelsevärdesproblem: $y' - y \tan(x) = \frac{1}{\cos(x)}$; $y(0) = 0$. (3p)

b) Ange allmän lösning till ekvationen $y'' - 7y' + 6y = \sin(x)$. (3p)

Lösning.

a) Ekvationen är linjär av första ordningen på formen $y' + p(x)y = g(x)$ med begynnelsevillkor $y(x_0) = y_0$.

Den löses med hjälp av formeln:

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x p(s)ds\right) \left(y(x_0) + \int_{x_0}^x g(s) \exp\left(\int_{x_0}^s p(t)dt\right) ds\right)$$

$$p(x) = \tan(x), g(x) = 1/\cos(x), y(x_0) = 0.$$

$$\int_{x_0}^x p(s)ds = \int_0^x -\tan(s)ds = \ln(\cos x) - \ln(\cos 0) = \ln(\cos x)$$

$$\exp\left(-\int_{x_0}^x p(s)ds\right) = \exp(-\ln(\cos x)) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\int_0^x g(s) \exp\left(\int_0^s p(t)dt\right) ds = \int_0^x \frac{1}{\cos(s)} \exp(\ln(\cos s)) ds = \int_0^x ds = x$$

$$\text{Svar: } y(x) = \frac{x}{\cos(x)}.$$

Andra sätt att lösa samma ekvation är med hjälp av integrerande faktorn. Formeln ovan är bara allmänt svar på samma metod. Vi multiplicerar ekvationen med integrerande faktorn $\exp\left(\int p(x)dx\right) = \exp(\ln(\cos(x))) = \cos(x)$ i det fallet och observerar att det som står i vänster är derivatan av produkt:

$$\left(\frac{d}{dx}y\right) \exp\left(\int p(x)dx\right) + y \cdot p(x) \exp\left(\int p(x)dx\right) = \frac{d}{dx}\left(y \exp\left(\int p(x)dx\right)\right)$$

och ekvationen på den formen

$$\frac{d}{dx}\left(y \exp\left(\int p(x)dx\right)\right) = g(x) \exp\left(\int p(x)dx\right)$$

löses med integrering av vänster och högerled och tillägg av en godtycklig konstant.

$$y \exp\left(\int p(x)dx\right) = \int g(x) \exp\left(\int p(x)dx\right) dx + C$$

Efter multiplikation med $\exp\left(-\int p(x)dx\right)$ vi får svaret med en godtycklig konstant C .

$$y = \exp\left(-\int p(x)dx\right) \int g(x) \exp\left(\int p(x)dx\right) dx + \exp\left(-\int p(x)dx\right) C$$

Konstanten väljes så att y skulle uppfylla begynnelsevillkor. I vår konkret situation $\exp\left(\int p(x)dx\right) = \cos(x)$, $g(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ och $\exp\left(-\int p(x)dx\right) = \frac{1}{\cos(x)}$. Detta medför att

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \int dx + C \cos(x) = \frac{x}{\cos(x)} + C \cos(x)$$

Begynnelsevillkoret är $y(0) = 0$ som medför att $C = 0$ och svaret $y(x) = \frac{x}{\cos(x)}$. ■

b) $y'' - 7y' + 6y = \sin(x)$.

Karakteristisk ekvation är $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, rötter är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$.

Detta medför att allmän lösning till homogena differentialekvationen $y'' - 7y' + 6y = 0$ är $y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{6x}$.

Rötter till karakteristiska ekvationen är inte lika med $\pm i$.

Detta medför att en partikulär lösning till inhomogena ekvationen kan hittas på formen $y_p(x) = A \sin(x) + B \cos(x)$.

Vi hittar koefficienterna A och B med att sätta den formeln in i ekvationen.

$$-A \sin(x) - B \cos(x) - 7(A \cos(x) - B \sin(x)) + 6(A \sin(x) + B \cos(x)) = (5B - 7A) \cos x + (5A + 7B) \sin x = \sin(x)$$

Detta medför ett system ekvationer för A och B .

$-7A + 5B = 0$ and $(5A + 7B) = 1$. Vi skriver det på matris form:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -7 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \text{ Gauss elimination ger trappstegsformen } \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 0 & \frac{74}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix},$$

Tillbaka substitution ger reducerade trappstegsformen: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{74} \\ 0 & 1 & \frac{7}{74} \end{bmatrix}$. $A = \frac{5}{74}$ och $B = \frac{7}{74}$.

$$y_p(x) = \frac{5}{74} \sin x + \frac{7}{74} \cos x$$

Svar: Lösningen är $y = \frac{5}{74} \sin x + \frac{7}{74} \cos x + C_1e^x + C_2e^{6x}$.

4. Rank, kolonnrum, nollrum. Lösbarhet av linjära system.

Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ och vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm dimensionen av kolonnrummet $Col(A)$ och dimensionen av nollrummet $Null(A)$ till A . (2p)

b) Bestäm om \mathbf{b} hör till kolonnrummet $Col(A)$ till A . (2p)

c) Betrakta transponat A^T av A och ange en bas till dess nollrum $Null(A^T)$. (2p)

d) Använd basen till $Null(A^T)$ och Fredholm satsen för att bevisa att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart. (2p)

Lösning.

a) Dimension av kolonnrummet till en matris kallas för matrisens rank och är lika med antalet pivot element. Dimension av nollrummet är lika med antalet fria variabler och är lika med $n - rank$ där n är antalet kolonner. Det är lätt att se att kolonnerna i A är linjärt oberoende: de är två ickeparallella vektorer i \mathbb{R}^4 . Rank är lika med 2. Nollrummet $Null(A)$ består bara av en nollvektor och har dimension noll.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, Gaussian elimination ger trappstegsmatrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Man ser att kolonnerna i A är linjärt oberoende.

b) Gausselimination på utvidgade matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$, ger $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ som visar att \mathbf{b} hör till kolonnrummet $Col(A)$ till A .

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Trappstegsformen till A^T fås med Gauss elimination: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

bas till nullspace $Null(A^T)$: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) Satsen om sambandet mellan ortogonala komplementet $(Col(A))^\perp$ till kolonnrummet $Col(A)$ och nullrummet till transponerat matris $Null(A^T)$ säger att $(Col(A))^\perp = Null(A^T)$. Detta medför Fredholm satsen som säger att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning om och endast om \mathbf{b} är ortogonal till $Null(A^T)$. Detta följer från att \mathbf{b} är ortogonal till alla basvektorer i $Null(A^T)$: både \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 i vårt fall. Vi testar detta:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0; \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \quad \text{Systemet är lösbart enligt Fredholms sats.}$$

(8p)

5. Linjära transformationer.

Ange standard matris till linjär transformation från \mathbb{R}^2 till \mathbb{R}^2 som utgör först spegling i linjen $x = y$ i planet och sedan rotation moturs runt origo i vinkel $\pi/3$. (4p)

Lösning.

Standardmatris till transformation T har kolonner som är bilder av basvektorer \mathbf{e}_1 och \mathbf{e}_2 .

Transformationen av \mathbf{e}_1 ger först \mathbf{e}_2 efter speglingen. Rotation av \mathbf{e}_2 i vinkel $\pi/3$ (60 grader) ger vektorn $\begin{bmatrix} \cos(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Transformationen av \mathbf{e}_2 ger först \mathbf{e}_1 efter speglingen. Rotation av \mathbf{e}_1 i vinkel $\pi/3$ (60 grader) ger vektorn $\begin{bmatrix} \cos(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

Standardmatrisen är $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

6. Eigenvektorer, egenvärden, diagonalisering. System linjära ODE.

a) Bestäm om matriser $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$, och $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, kan diagonaliseras och i så fall ange motsvarande diagonalmatris och transformationsmatris. (4p)

b) Betrakta systemet ODE: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ med $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$. Ange allmän lösning och skissa fasportrett.

Bestäm lösningen som uppfyller begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$. (4p)

Lösning.

a) matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$, har karakteristiskt polynom: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, egenvektorer: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = -2$. Egenvärden är olika, detta medför att egenvektorer måste vara linjärt oberoende.

Det är lätt att se i det fallet med två vektorer \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 att de är linjärt oberoende: icke parallella här.

Matrisen A diagonaliseras med matrisen $P = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, nämligen $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Matrisen $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, har karakteristiskt polynom: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, egenvärdet är $\lambda = 3$ och har multiplicitet 2.

Det finns bara en linjärt oberoende egenvektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ som är lösningen till ekvationen $(B - 3I)\mathbf{w} = \mathbf{0}$, eller $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Enligt satsen om tillräckligt och nödvändigt kriterium för diagonaliserbara matriser matrisen B kan inte diagonaliseras

b) Allmän lösning till ekvationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ är $\mathbf{x}(t) = C_1 e^t \mathbf{v}_1 + C_2 e^{-2t} \mathbf{v}_2$.

Begynnelsevillkoret är $\mathbf{x}(0) = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$. Detta medför ekvationen för C_1 och C_2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Utvidgad matris till detta system är $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 12 \end{bmatrix}$. Gauss elimination leder till trappstegsmatrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ och värden för $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Lösningen till begynnelsevillkroproblemet är $\mathbf{x}(t) = e^t \mathbf{v}_1 + 2e^{-2t} \mathbf{v}_2$.

Konfigurationen i fasportrett är sadelpunkt. I fall då $C_2 = 0$ går banor mot oändligheten längs linjen genom origo, som är parallell med \mathbf{v}_1 . Om $C_1 = 0$ går banor mot origo längs linjen genom origo, som är parallell med \mathbf{v}_2 . Banor i fasplanet mellan dessa linjer för C_1 och C_2 skilda från noll är hypebler som närmar sig ovannämnda räta linjer då tiden går mot ∞ och $-\infty$.

7. Skalär produkt, ortogonalitet, projektion. Symmetriska och ortogonala matriser.

Betrakta symmetrisk matris $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Hitta en ortogonal matris som transformerar matrisen A till en diagonal matris. **(3p)**

b) Ange spektral dekomposition av matrisen A . **(3p)**

Lösning.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$, karakteristiskt polynom $\lambda^2 - 5\lambda - 36$. Eigenvärden $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 9$.

egenvektorer: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda = -4$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda = 9$. Matris A är symmetrisk.

Detta medför att \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 är ortogonala. Det är och så lätt att se att $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

Normerade egenvektorer är $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|} \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Ortogonal transformationsmatris i det fallet är $P = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Dess invers är lika

med dess transponat $P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ och är eventuellt lika med själva P .

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

b) Spektral dekomposition av symmetrisk matris A är uttryck

$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T$ med ortogonala normerade egenvektorer \mathbf{w}_i . I fall med givna matrisen 2×2 består summan av två termer

$$A = -4 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T + 9 \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^T = -\frac{4}{13} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} + \frac{9}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Sats.

Formulera och bevisa integralkalkulens huvudsats. **(6p)**

Maxpoäng på tentan är 50.

Betyggränser för poäng på tentamen, inklusive eventuella bonuspoäng är: **3:** 20; **4:** 30; **5:**

Formelblad

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y);$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y));$$

$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(x);$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)};$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y));$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2};$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2};$$

Binomialsatsen (lämpliga speciella fall)

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;$$

Konjugatregeln

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1-k)} b^k;$$

T.ex. är

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$