# Sats 1.4.4 i Lay, s. 53, bevis s. 56

Låt $A$ vara en $m \times n$ matris. Följande påståenden är ekvivalenta.
(a). För varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning.
(b). Varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ är linjär kombination av kolonner i $A$.
(c). Colonner i $A$ spänner $\mathbb{R}^m$, eller Span $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\} = \mathbb{R}^m$.
(d). $A$ har en pivot position i varje rad.

**Bevis**

Påståenden (a), (b), (c) är ekvivalenta enligt definition av matris vektor produkt, linjär kombination och spannet av vektorer.

Låt $U$ vara trappstegsmatris som fås från $A$ med hjälp av Gauss elimination. Trappstegsmatrisen som svarar mot utvidgade matrisen $[A, \mathbf{b}]$ har formen $[U, \mathbf{d}]$ med någon kolonn $\mathbf{d}$ som är resultat av Gauss elimination tillämpad på högerledet $\mathbf{b}$ i ursprungliga matrisen $[A, \mathbf{b}]$:

$$[A, \mathbf{b}] \curvearrowright \overset{Gauss}{\cdots} \curvearrowright [U, \mathbf{d}]$$

I fall då (d) gäller och $A$ har en pivot position i varje rad, kan $[U, \mathbf{d}]$ se ut som följande matris:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * & ... & * & * & d_1 \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & ... & * & * & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & ... & * & * & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & ... & * & * & d_4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \blacksquare & * & d_m \end{bmatrix}$$

Detta medför att systemet har några lösningar för varje högerled och (a) gäller.

Om (d) är fel, så innehåller åtminstone sista raden i $U$ bara nollor. Det är eftersom man flyttar alla nollrader neråt vid Gauss elimination. Vi väljer ett högerled $\mathbf{d}$ i transformerade systemet $U\mathbf{x} = \mathbf{d}$ med utvidgade trappstegsmatrisen $[U, \mathbf{d}]$ som har 1 i $\mathbf{d}$ i sista raden:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * & ... & * & * & d_1 \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & ... & * & * & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & ... & * & * & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & ... & * & * & d_4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I det fallet får vi ett system $U\mathbf{x} = \mathbf{d}$ där sista ekvationen som svarar sista radet i $[U, \mathbf{d}]$ är olösbart: $0 = 1$.

Ursprungliga systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är naturligtvist också olösbart i det fallet eftersom de är ekvivalenta. Detta visar att (a) och (d) är ekvivalenta: de gäller bara samtidigt.