Fullständig formulering och bevis för satsen om strukturen av allmän lösning till icke homogena linjära ODE (Sats 18.1.2 i Adams)

Sats. Betrakta en icke homogen (inhomogen) linjär differentialekvation

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \qquad (1)$$

med godtyckligt kontinuerligt högerled och motsvarande homogen differentialekvation med samma koefficienter

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \qquad (2)$$

Låt $y_h(x)$ vara en allmän lösning till homogena differentialekvationen (2) (ett uttryck som innehåller ALLA lösningar till homogena ekvationen).

Låt $y_p(x)$ vara en godtycklig fixerad partikulär lösning till icke homogena (inhomogena) differentialekvationen (1).

Då är summan

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \qquad (3)$$

en allmäm lösning till inhomogena differentialekvationen (1) (ett uttryck som innehåller ALLA lösningar till inhomogena differentialekvationen).

Commentar till bevis.

Beviset består av två steg.

Vi visar först att summan av en godtycklig lösning $u_h(x)$ till homogena ekvationen (2) och en godtycklig fixerad partikulär lösning $y_p(x)$ till inhomogena ekvationen (1) ger en lösning till inhomogena differentialekvationen. Det steget betraktas i Adams i Sats 18.1.2.

Det följer INTE härifrån att ALLA lösningar till inhomogena ekvationen kan framställas på det viset.

Sedan visar vi att ALLA lösningar $y(x)$ till inhomogena ekvationen (1) kan framställas på det viset: som summan av en godtycklig fixerad partikulär lösning $y_p(x)$ till inhomogena ekvationen (1) och någon lösning $w_h(x)$ till homogena ekvationen(2). Det steget i satsen användes i Adams i senare kapitlar, men är missat i formuleringen av Sats 18.1.2. Dessa två steg tillsammans visar att formeln (3) ger en allmän lösnign till ekvationen (1).

Lägg märke till att lösningar $u_h(x)$ och $w_h(x)$ till homogena ekvationen (2) som uppstår i dessa påståenden, båda ingår i allmänna lösningen $y_h(x)$ som speciella fall av möjliga lösningar till homogena ekvationen.

Bevis

Steg 1.

En godtycklig lösning $u_h(x)$ (den betecknas som $y_h(x)$ i Adams) till homogena ekvationen uppfyler ekvationen

$$a_n(x)u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = 0.$$

Fixerad partikulär lösning $y_p(x)$ till inhomogena ekvationen uppfyller ekvationen

$$a_n(x)y_p^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y_p'(x) + a_0(x)y_p(x) = f(x).$$

Addera dessa två ekvationer, använd att de är linjära och att deriatan är en linjär operation: $a_k(x)u^{(k)}(x) + a_k(x)y_p^{(k)}(x) = a_k(x)\left(u(x) + y_p(x)\right)^{(k)}$ för att få fram ekvationen

$$\begin{gathered} a_n(x)\left(u^{(n)}(x) + y_p^{(n)}(x)\right) + a_{n-1}(x)\left(u^{(n-1)}(x) + y_p^{(n-1)}(x)\right) + ... \\ + a_1(x)\left(u'(x) + y_p'(x)\right) + a_0(x)\left(u(x) + y_p(x)\right) = f(x). \end{gathered}$$

Detta visar att $y(x) = u_h(x) + y_p(x)$ är lösningen till inhomogena differentialekvationen (1).

Steg 2.

Betrakta en godtycklig lösning $y(x)$ och fixerade lösningen $y_p(x)$ till inhomogena ekvationen (1).

De uppfyller ekvationer

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x).$$

och

$$a_n(x)y_p^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y_p'(x) + a_0(x)y_p(x) = f(x).$$

Subtrahera andra ekvationen första ekvationen och få ekvationen

$$\begin{gathered} a_n(x)\left(y^{(n)}(x) - y_p^{(n)}(x)\right) + a_{n-1}(x)\left(y^{(n-1)}(x) - y_p^{(n-1)}(x)\right) + ... \\ + a_1(x)\left(y'(x) + y_p'(x)\right) + a_0(x)\left(y(x) - y_p(x)\right) = 0 \end{gathered}$$

som visar att $y(x) - y_p(x) = u_h(x)$ är en lösning till homogena differentialekvationen (2) och måste ingå som ett speciellt fall i allmänna lösningen $y_h(x)$ till homogena differentialekvationen.

Detta betyder att ALLA lösningar till inhomogena differentialekvationen framställes på det viset och att

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

är en allmän lösning till inhomogena differentialekvationen.$\blacksquare$