MVE465

Lösningar på övningsuppgifter

Detta dokument innehåller mina renskrivna lösningar på övningsuppgifter i kursen Linjär algebra och analys fortsättning (MVE465). Jag kan inte lova att samtliga lösningar är välformulerade och pedagogiska, men förhoppningsvis är de flesta lösningar hjälpsamma. /Jimmy

Utvalda godkäntuppgifter är understrukna.

Överbetygsuppgifter indikeras med en stjärna *.

Innehållsförteckning

Uppgifter ur Adams & Essex

Läsvecka 1, Övning 1

Problem 5.3.6.

Betrakta funktionen

$$f(x) = \cos x, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Partitionera intervallet i $n = 4$ stycken lika stora delintervall P_n av längd $2\pi/n$. Utvärdera den lägre Riemann-summan $L(f, P_n)$ och den övre Riemann-summan $U(f, P_n)$.

Lösning: Vi är alltså intresserade av delintervallen

$$P_1 = [0, \pi/2], \qquad P_2 = [\pi/2, \pi], \qquad P_3 = [\pi, 3\pi/2], \qquad P_4 = [3\pi/2, 2\pi].$$

Vi har plottat funktionen $f(x) = \cos(x)$ och de fyra delintervallen i Figur 1. Vi ser tydligt att funktionen antingen ökar eller minskar på varje delintervall, vilket innebär att minimipunkterna och maximipunkterna finnes i delintervallens ändpunkter:

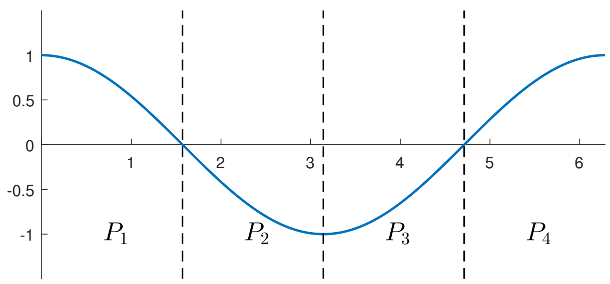
$$\begin{array}{lll} P_1: & l_1 = \pi/2, & u_1 = 0 \\ P_2: & l_2 = \pi, & u_2 = \pi/2 \\ P_3: & l_3 = \pi, & u_3 = 3\pi/2 \\ P_4: & l_4 = 3\pi/2, & u_4 = 2\pi \end{array}$$

Eftersom alla delintervall har samma längd $\Delta x = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ får vi den lägre Riemann-summan

$$\begin{aligned} L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{4} \cos(l_i)\Delta x &= \Big(\cos(\pi/2) + \cos(\pi) + \cos(\pi) + \cos(3\pi/2)\Big)\Delta x = \\ &= \Big(0 - 1 - 1 + 0\Big)\frac{\pi}{2} = -\pi, \end{aligned}$$

och den övre Riemann-summan

$$\begin{aligned} U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{4} \cos(u_i)\Delta x &= \Big(\cos(0) + \cos(\pi/2) + \cos(3\pi/2) + \cos(2\pi)\Big)\Delta x = \\ &= \Big(1 + 0 + 0 + 1\Big)\frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$



Figur 1: Grafen till funktionen $f(x) = \cos(x)$ indelad i de fyra delintervallen P_1, P_2, P_3, P_4. Vi ser att minimum och maximum för varje intervall finnes i respektive intervalls ändpunkter.

Problem 5.3.14

Uttryck gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \ln\left(1 + \frac{2i}{n}\right)$$

som en integral.

Lösning: Vi börjar med att skriva om summan på formen

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

Om vi sätter $x_i = \frac{2i}{n}$ så blir längden på varje delintervall $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{2i}{n} - \frac{2(i-1)}{n} = \frac{2}{n}$, och eftersom denna längd är oberoende av indexet i så gör vi oss av med det: $\Delta x = \frac{2}{n}$. Summan blir då

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\Big(1 + x_i\Big)\Delta x \quad \to \quad \int_a^b \ln(1+x)\, \mathrm{d}x, \qquad (n \to \infty).$$

Det enda som återstår nu är att hitta integrationsgränserna a och b. Detta är en enkel uppgift:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0, \qquad \text{och} \qquad b = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = 2.$$

Vi drar slutsatsen att

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \ln\left(1 + \frac{2i}{n}\right) = \int_0^2 \ln(1+x)\, \mathrm{d}x.$$

Problem 5.4.2

Förenkla uttrycket

$$\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^3 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^3 2f(x)\ \mathrm{d}x - \int_1^2 3f(x)\ \mathrm{d}x \tag{1}$$

Lösning: Kom ihåg att integralen av en funktion över ett intervall $[a, b]$ ger arean mellan x-axeln och funktionens graf i detta intervall. Om två integraler $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ och $\int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x$ har samma integrand $f(x)$ och de två intervallen $[a, b]$, $[b, c]$ ligger precis bredvid varandra (utan överlapp) så kan vi lägga ihop de två integralerna till en:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Detta betyder helt enkelt att den totala arean hos två separata regioner är lika med summan av respektive regions area. Se Figur 2.

Vi börjar med att subtrahera den fjärde integralen från den första integralen:

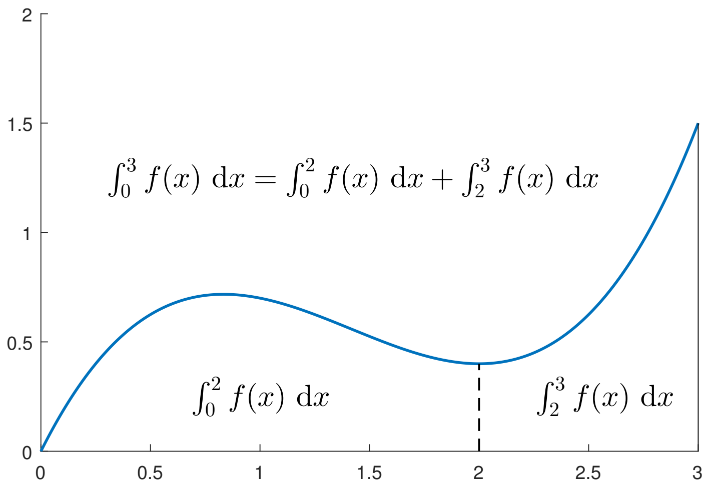
$$\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_1^2 3f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 3f(x)\ \mathrm{d}x$$

Eftersom denna integral täcker intervallet $[0, 1]$ och den andra integralen i ekvation (1) täcker intervallet $[1, 3]$, och de två integralerna har samma integrand, så kan vi addera dem:

$$\int_0^1 3f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^3 3f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^3 3f(x)\ \mathrm{d}x$$

Det enda som återstår är att subtrahera den tredje termen i ekvation (1):

$$(1) = \int_0^3 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^3 2f(x)\ \mathrm{d}x = 3 * \int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x - 2 * \int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x.$$



Figur 2: Arean mellan x-axeln och grafen till $f(x)$ i intervallet $[0, 3]$ kan fås genom att beräkna arean över delintervallen $[0, 2]$ och $[2, 3]$ var för sig, och sedan summera de två areorna. Detta faktum kan skrivas i termer av integraler som $\int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}x$.

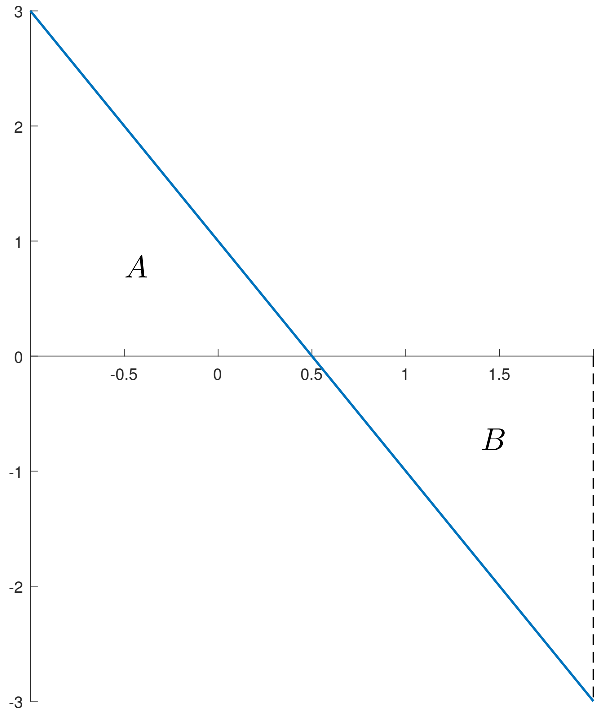
Problem 5.4.6

Utvärdera integralen

$$\int_{-1}^{2} (1 - 2x)\ \mathrm{d}x$$

genom att tolka integralen i termer av areor.

Lösning: Vi börjar med att plotta funktionen:



Figur 3

Som vi ser kan regionen mellan x-axeln och grafen delas in i två stycken trianglar A och B. Integralen är summan av dessa två trianglars areor, men eftersom triangeln B ligger nedanför x-axeln kommer dess area att räknas negativt:

$$\int_{-1}^{2} (1 - 2x)\ \mathrm{d}x = \mathrm{area}(A) - \mathrm{area}(B) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0.$$

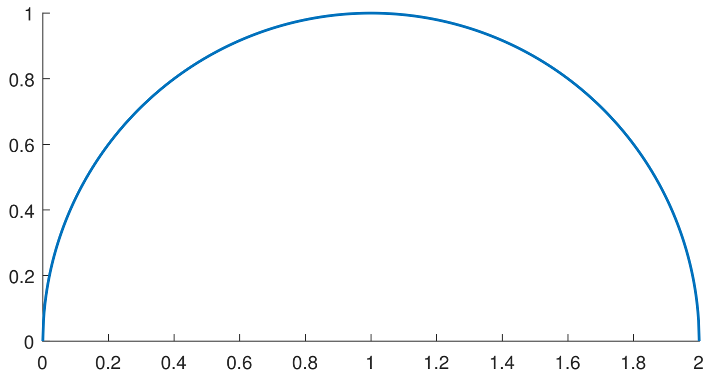
Problem 5.4.12

Utvärdera integralen

$$\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\ \mathrm{d}x$$

genom att tolka integralen i termer av areor.

Lösning: Vi börjar med att plotta funktionen:



Figur 4

Som vi ser bildar denna graf en halvcirkel med radie $r = 1$, så

$$\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\ \mathrm{d}x = \mathrm{area}(halvcirkel) = \frac{1}{2} * \pi r^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Problem 5.4.34

Beräkna integralen

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x$$

där den styckvis kontinuerliga funktionen f ges av

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x\ , & x < 0 \\ 2\ , & x \geq 0 \end{cases}$$

Lösning: Vi delar upp integralen i två delar som låter oss utvärdera funktionen på varje del:

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} (1 + x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} 2\ \mathrm{d}x.$$

Vi kan beräkna de två integralerna var för sig genom att plotta funktionerna, så som vi har gjort i tidigare uppgifter. Om man gör detta så får man att

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{5}{2}.$$

Problem 5.5.4

Beräkna integralen

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \, \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi skriver om integranden med hjälp av negativa exponenter,

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = x^{-2} - x^{-3},$$

och använder deriveringsregeln $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1}$ baklänges på respektive term för att hitta den primitiva funktionen:

$$F(x) = -x^{-1} + \frac{1}{2} x^{-2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}.$$

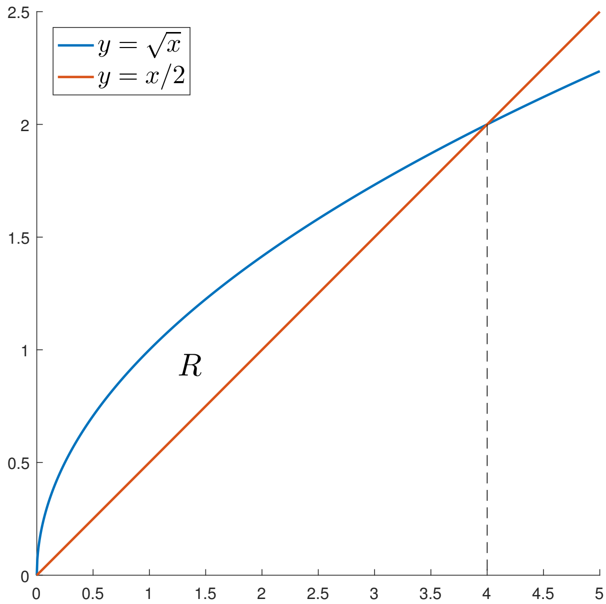
Integralen har därför värdet

$$\int_{-2}^{-1} x^{-2} - x^{-3} \, \mathrm{d}x = F(-1) - F(-2) = \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{8}.$$

Problem 5.5.26

Beräkna arean av den region R som ligger under grafen $y = \sqrt{x}$ och över grafen $y = \frac{x}{2}$.

Lösning: Vi börjar med att plotta de två graferna för att se hur regionen R ser ut.



Vi ser att de två graferna skär varandra i punkterna $x = 0$ och $x = 4$, så dessa är våra integrtionsgränser. Arean av regionen R kan nu beräknas via följande process:

Steg 1. Beräkna arean mellan grafen $y = \sqrt{x}$ och x-axeln, det vill säga beräkna integralen

$$\int_0^4 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x,$$

Steg 2. Beräkna arean mellan grafen $y = x/2$ och x-axeln, det vill säga beräkna integralen

$$\int_0^4 x/2\ \mathrm{d}x,$$

Steg 3. Notera att arean av regionen R är arean i **Steg 1.** minus arean i **Steg 2.**

$$\text{area}(R) = \int_0^4 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x - \int_0^4 x/2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^4 = \frac{4}{3}.$$

Problem 5.5.42

Beräkan derivatan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$

Lösning: Integralkalkylens huvudsats säger att

$$\int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = F(x^2) - F(0),$$

där $F(u)$ är en primitiv funktion till $f(u) = \frac{\sin u}{u}$. Produktregeln för derivator ger nu att

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \Big(F(x^2) - F(0)\Big) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2\right) \Big(F(x^2) - F(0)\Big) + x^2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F(x^2) - F(0)\Big)\right) = \\
&= 2x\Big(F(x^2) - F(0)\Big) - x^2\Big(2xf(x^2) - 0\Big) = \\
&= 2x \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - 2x\sin x^2.
\end{aligned}$$

Mer än såhär kan vi inte förenkla, då den primitiva funktionen $F(u)$ inte har något enkelt uttryck.

Problem 2.10.8

Beräkna den indefinita integralen

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x$$

Lösning: Uppgiften är med andra ord att beräkna en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}$. Ett sätt är att hitta lösningen är att dela upp funktionen i två delar,

$$f(x) = \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x,$$

och använda en lista över derivator av trigonometriska funktioner för att se att $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x$. Det följer att

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x\ \mathrm{d}x = \tan x + \sin x + C.$$

Problem 2.10.26

Använd trigonometriska identiteter som

$$\begin{cases} \sec^2 x = 1 + \tan^2 x, \\ \sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \\ \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

för att beräkna den indefinita integralen

$$\int \sin^2 x \; \mathrm{d}x$$

Lösning: Låt oss använda den sistnämnda identiteten, som kan skrivas om på formen

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}.$$

Det följer att

$$\int \sin^2 x \; \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \; \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C.$$

Läsvecka 1, Övning 2

Problem 5.6.4

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int e^{2x} \sin\!\left(e^{2x}\right) \, \mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: När man stöter på såna här uppgifter vill man göra en variabelsubstitution $u = g(x)$, för något $g(x)$, som förenklar integranden genom att baka in någon del av integranden i termen

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x.$$

Vi gör variabelsubstitutionen $u = e^{2x}$, för då försvinner faktorn e^{2x} ur integranden:

$$\int e^{2x} \sin\!\left(e^{2x}\right) \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = e^{2x} \\ \mathrm{d}u = 2e^{2x} \, \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \int \sin u \, \mathrm{d}u = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos\!\left(e^{2x}\right) + C.$$

Problem 5.6.16

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x^2}{2+x^6}\,\mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: Hur tänker man när man löser en sån här uppgift? Jag tänker att jag vill bli av med faktorn x^2 i täljaren, för man kan nog inte enkelt bli av med nämnaren. Så låt oss sätta $u = x^3$.

$$\int \frac{x^2}{2+x^6}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = x^3 \\ \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Integralen påminner mycket om derivatan för arctan, vi behöver vara göra om tvåan i nämnaren till en etta. Ett sätt att göra detta är via en till variabelsubstitution som byter ut u^2 mot $2v^2$, varefter vi kan faktorisera ut en tvåa från hela nämnaren.

$$\int \frac{1}{2+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\begin{array}{c} v = u/\sqrt{2} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}u/\sqrt{2} \end{array}\right] = \frac{\sqrt{2}}{3}\int \frac{1}{2+2v^2}\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan v + C = \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}}\right).$$

Problem 5.6.18

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: Det är inte uppenbart hur man löser denna uppgift, så låt oss helt enkelt testa något och se vad som händer.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x\ \mathrm{d}x}{e^{2x}+1} = \begin{bmatrix} u = e^x \\ \mathrm{d}u = e^x\ \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \arctan u + C = \arctan e^x + C.$$

I det här fallet gick vårt experiment bra, men ibland får man testa flera olika saker innan man hittar en fungerande approach.

Problem 5.6.42*

Utvärdera integralen

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \sin^5 x \, \mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: Låt oss skriva om integranden med hjälp av trigonometriska ettan:

$$\sin^5 x = \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x,$$

Då får vi

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \cos x \\ \mathrm{d}u = -\sin x \, \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int_{-1}^{1/\sqrt{2}} (1 - u^2)^2 \, \mathrm{d}u.$$

De nya integrationsgränserna är $u = \cos \pi/4 = 1/\sqrt{2}$ respektive $u = \cos \pi = -1$, och vi har bytt ordning på dem så att vi integrerar från -1 tilll $1/\sqrt{2}$ istället för från $1/\sqrt{2}$ till -1. Detta inför ett minustecken som tar ut minustecknet från $\mathrm{d}u = -\sin x \, \mathrm{d}x$, så ovanstående ekvation ska vara korrekt.

Att beräkna integralen är nu en enkel uppgift:

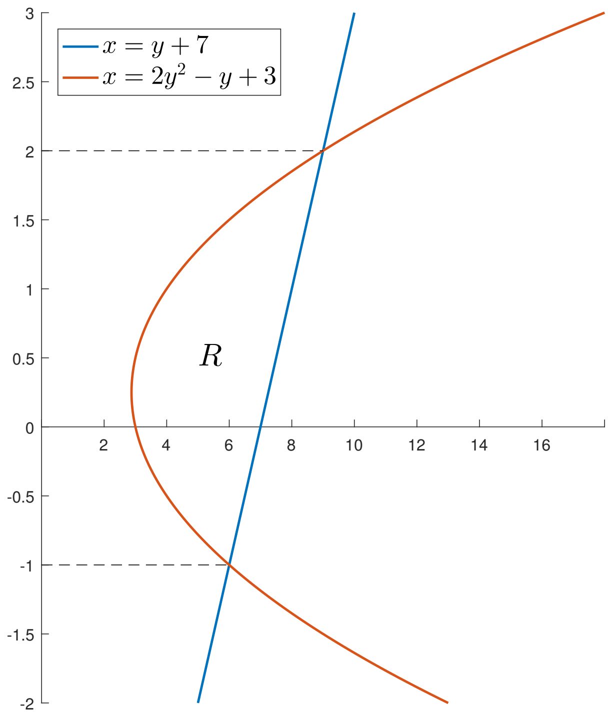
$$\int_{-1}^{1/\sqrt{2}} (1 - u^2)^2 \, \mathrm{d}u = \int_{-1}^{1/\sqrt{2}} 1 - 2u^2 + u^4 \, \mathrm{d}u = \left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right]_{-1}^{1/\sqrt{2}} = \frac{43}{60\sqrt{2}} + \frac{8}{15}.$$

Problem 5.7.6

Sketcha och beräkna arean hos den region som bestäms av kurvorna

$$x - y = 7, \qquad x = 2y^2 - y + 3.$$

Lösning: Vi börjar med att sketcha de två kurvorna, för att se hur regionen i fråga ser ut:



Figur 5

Vi vet att en integral på formen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ger arean mellan grafen till $f(x)$ och x-axeln, i intervallet $a \leq x \leq b$. På samma sätt ger integralen $\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$ arean mellan grafen till $f(y)$ och y-axeln, i intervallet $a \leq y \leq b$. Vi kan därför beräkna arean av regionen R genom att först beräkna arean till vänster om linjen $f(y) = y + 7$ och sedan subtrahera arean till vänster om kurvan $g(y) = 2y^2 - y + 3$:

$$\mathrm{area}(R) = \int_a^b 7 + y\,\mathrm{d}y - \int_a^b 2y^2 - y + 3\,\mathrm{d}y = \int_a^b (7 + y) - (2y^2 - y + 3)\,\mathrm{d}y,$$

där integrationsgränserna a, b är de två punkter där kurvorna skär varandra:

$$7 + y = 2y^2 - y + 3 \quad \iff \quad y^2 - y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1,\ y = 2.$$

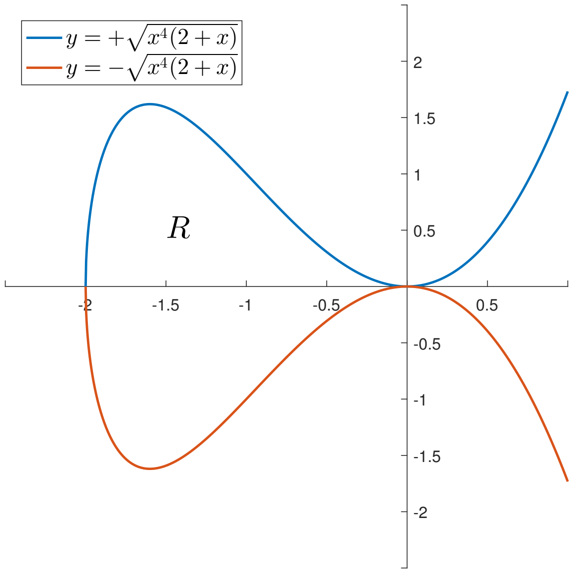
Arean är alltså

$$\mathrm{area}(R) = \int_{-1}^{2} -2y^2 + 2y + 4\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{2}{3}y^3 + y^2 + 4y\right]_{-1}^{2} = 9.$$

Problem 5.7.28

Beräkna arean hos den region R som innesluts av loopen $y^2 = x^4(x+2)$ och som ligger till vänster om origo.

Lösning: Vi börjar med att sketcha regionen i fråga för att se hur den ser ut. Notera att loopen utgörs av de två graferna $y = +\sqrt{x^4(2+x)}$ och $y = -\sqrt{x^4(2+x)}$.



Figur 6

Som vi ser är regionen symmetrisk kring x-axeln, vilket innebär att halva arean ligger ovanför x-axeln och halva arean ligger nedanför. Det räcker därför att beräkna arean hos den övre halvan och sedan multiplicera med 2:

$$\begin{aligned}
\text{area}(R) &= 2\int_{-2}^{0} \sqrt{x^4(2+x)}\ \mathrm{d}x = 2\int_{-2}^{0} x^2\sqrt{2+x}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u^2 = 2+x \\ 2u\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \\
&= 2\int_{0}^{\sqrt{2}} (u^2-2)^2 u * 2u\ \mathrm{d}u = 4\int_{0}^{\sqrt{2}} u^6 - 4u^4 + 4u^2\ \mathrm{d}u = \\
&= 4\left[\frac{1}{7}u^7 - \frac{4}{5}u^5 + \frac{4}{3}u^3\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\left(\frac{\sqrt{128}}{7} - \frac{4\sqrt{32}}{5} + \frac{4\sqrt{8}}{3}\right) = \frac{256\sqrt{2}}{105}.
\end{aligned}$$

Problem 6.1.2

Beräkna integralen

$$\int (x+3)e^{2x}\ \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi sätter

$$U(x) = x+3, \qquad V(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

och partialintegrerar:

$$\begin{aligned}\int (x+3)e^{2x}\ \mathrm{d}x = \int U(x)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x = U(x)V(x) - \int \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}V(x)\ \mathrm{d}x &= \\ = \frac{1}{2}(x+3)e^{2x} - \frac{1}{2}\int 1 * e^{2x}\ \mathrm{d}x &= \\ = \frac{1}{2}(x+3)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.&\end{aligned}$$

Problem 6.1.8

Beräkna integralen

$$\int x^2 \arctan x \, \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi sätter

$$U(x) = \frac{1}{3}x^3, \qquad V(x) = \arctan x$$

och partialintegrerar:

$$\begin{aligned}\int x^2 \arctan x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} V(x) \, \mathrm{d}x = U(x)V(x) - \int U(x)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x &= \\ = \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int x^3 * \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x &= \\ = \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int \left(1 - \frac{x}{1+x^2}\right) \, \mathrm{d}x &= \\ = \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln\bigl(1+x^2\bigr) + C.\end{aligned}$$

Problem 6.1.14

Beräkna integralen

$$\int xe^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x.$$

Lösning: Denna uppgift är lite lurig, det känns naturligt att sätta $U(x) = x$ och $V(x) = e^{\sqrt{x}}$ men detta kommer inte fungera. Istället gör vi en variabelsubstitution:

$$\int xe^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u^2 = x \\ 2u\ \mathrm{d}u = \ \mathrm{d}x \end{bmatrix} = 2\int u^3 e^u\ \mathrm{d}u = 2I_3,$$

där

$$\begin{aligned} I_n &= \int u^n e^u\ \mathrm{d}u = \begin{bmatrix} U = u^n, & V = e^u \\ \mathrm{d}U = nu^{n-1}\ \mathrm{d}u, & \mathrm{d}V = e^u\ \mathrm{d}u \end{bmatrix} = \\ &= \int U\ \mathrm{d}V = U(u)V(u) - \int V\ \mathrm{d}U = u^n e^u - nI_{n-1}. \end{aligned}$$

Vi får då att

$$\begin{aligned} &I_0 = e^u \\ \Rightarrow\ &I_1 = ue^u - e^u = (u-1)e^u \\ \Rightarrow\ &I_2 = u^2e^u - 2(u-1)e^u = (u^2 - 2u + 2)e^u \\ \Rightarrow\ &I_3 = u^3e^u - 3(u^2 - 2u + 2)e^u = (u^3 - 3u^2 + 6u - 6)e^u \end{aligned}$$

Svaret är med andra ord

$$\int xe^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = 2(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6)e^{\sqrt{x}}.$$

Problem 6.3.2

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\ \mathrm{d}x.$$

Lösning: Om vi sätter $2x = \sin u$ så kommer nämnaren att få den enkla formen $\cos u$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 2x = \sin u \\ 2\ \mathrm{d}x = \cos u\ \mathrm{d}u \end{bmatrix} &= \frac{1}{8}\int \sin^2 u\ \mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{16}\int (1-\cos 2u)\ \mathrm{d}u = \\
&= \frac{u}{16} - \frac{\sin 2u}{32} + C = \\
&= \frac{1}{16}\arcsin 2x - \frac{1}{16}\sin u \cos u + C = \\
&= \frac{1}{16}\arcsin 2x - \frac{1}{8}x\sqrt{1-4x^2} + C.
\end{aligned}$$

Problem 6.3.5*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9-x^2}}.$$

Lösning: I detta fall sätter vi $x = 3\sin\theta$ för att roten i nämnaren ska bli $3\cos\theta$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \left[\begin{array}{c} x = 3\sin\theta \\ \mathrm{d}x = 3\cos\theta \ \mathrm{d}\theta \end{array}\right] = \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta} = -\frac{1}{9}\cot\theta + C = \frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C.$$

Problem 6.3.44*

Använd substitutionen $x = \tan(\theta/2)$ för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}.$$

Lösning: Vi gör helt enkelt som uppgiften säger.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta} &= \begin{bmatrix} x = \tan\frac{\theta}{2}, & \cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \\ \mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, & \sin\theta = \frac{2x}{1+x^2} \end{bmatrix} = \\
&= \int_0^1 \frac{\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)} = \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \Big[\ln|1+x|\Big]_0^1 = \ln 2.
\end{aligned}$$