MVE465

Lösningar på övningsuppgifter

Detta dokument innehåller mina renskrivna lösningar på övningsuppgifter i kursen Linjär algebra och analys fortsättning (MVE465). Jag kan inte lova att samtliga lösningar är välformulerade och pedagogiska, men förhoppningsvis är de flesta lösningar hjälpsamma. /Jimmy

Utvalda godkäntuppgifter är understrukna.

Överbetygsuppgifter indikeras med en stjärna *.

Innehållsförteckning

Uppgifter ur Adams & Essex

Läsvecka 1, Övning 1

Problem 5.3.6.

Betrakta funktionen

$$f(x) = \cos x, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Partitionera intervallet i $n = 4$ stycken lika stora delintervall P_n av längd $2\pi/n$. Utvärdera den lägre Riemann-summan $L(f, P_n)$ och den övre Riemann-summan $U(f, P_n)$.

Lösning: Vi är alltså intresserade av delintervallen

$$P_1 = [0, \pi/2], \qquad P_2 = [\pi/2, \pi], \qquad P_3 = [\pi, 3\pi/2], \qquad P_4 = [3\pi/2, 2\pi].$$

Vi har plottat funktionen $f(x) = \cos(x)$ och de fyra delintervallen i Figur 1. Vi ser tydligt att funktionen antingen ökar eller minskar på varje delintervall, vilket innebär att minimipunkterna och maximipunkterna finnes i delintervallens ändpunkter:

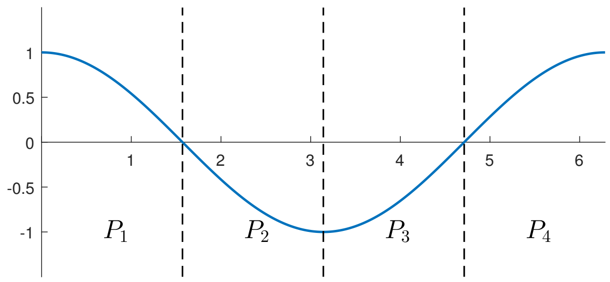
$$\begin{array}{lll}
P_1: & l_1 = \pi/2, & u_1 = 0 \\
P_2: & l_2 = \pi, & u_2 = \pi/2 \\
P_3: & l_3 = \pi, & u_3 = 3\pi/2 \\
P_4: & l_4 = 3\pi/2, & u_4 = 2\pi
\end{array}$$

Eftersom alla delintervall har samma längd $\Delta x = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ får vi den lägre Riemann-summan

$$\begin{aligned}
L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{4} \cos(l_i)\Delta x &= \Big(\cos(\pi/2) + \cos(\pi) + \cos(\pi) + \cos(3\pi/2)\Big)\Delta x = \\
&= \Big(0 - 1 - 1 + 0\Big)\frac{\pi}{2} = -\pi,
\end{aligned}$$

och den övre Riemann-summan

$$\begin{aligned}
U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{4} \cos(u_i)\Delta x &= \Big(\cos(0) + \cos(\pi/2) + \cos(3\pi/2) + \cos(2\pi)\Big)\Delta x = \\
&= \Big(1 + 0 + 0 + 1\Big)\frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$



Figur 1: Grafen till funktionen $f(x) = \cos(x)$ indelad i de fyra delintervallen P_1, P_2, P_3, P_4. Vi ser att minimum och maximum för varje intervall finnes i respektive intervalls ändpunkter.

Problem 5.3.14

Uttryck gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\ln\left(1+\frac{2i}{n}\right)$$

som en integral.

Lösning: Vi börjar med att skriva om summan på formen

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

Om vi sätter $x_i = \frac{2i}{n}$ så blir längden på varje delintervall $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{2i}{n} - \frac{2(i-1)}{n} = \frac{2}{n}$, och eftersom denna längd är oberoende av indexet i så gör vi oss av med det: $\Delta x = \frac{2}{n}$. Summan blir då

$$\sum_{i=1}^{n}\ln\Big(1+x_i\Big)\Delta x \quad \to \quad \int_a^b \ln(1+x)\,\mathrm{d}x, \qquad (n\to\infty).$$

Det enda som återstår nu är att hitta integrationsgränserna a och b. Detta är en enkel uppgift:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0, \qquad \text{och} \qquad b = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n} = 2.$$

Vi drar slutsatsen att

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\ln\left(1+\frac{2i}{n}\right) = \int_0^2 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

Problem 5.4.2

Förenkla uttrycket

$$\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^3 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^3 2f(x)\ \mathrm{d}x - \int_1^2 3f(x)\ \mathrm{d}x \tag{1}$$

Lösning: Kom ihåg att integralen av en funktion över ett intervall $[a, b]$ ger arean mellan x-axeln och funktionens graf i detta intervall. Om två integraler $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ och $\int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x$ har samma integrand $f(x)$ och de två intervallen $[a, b]$, $[b, c]$ ligger precis bredvid varandra (utan överlapp) så kan vi lägga ihop de två integralerna till en:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Detta betyder helt enkelt att den totala arean hos två separata regioner är lika med summan av respektive regions area. Se Figur 2.

Vi börjar med att subtrahera den fjärde integralen från den första integralen:

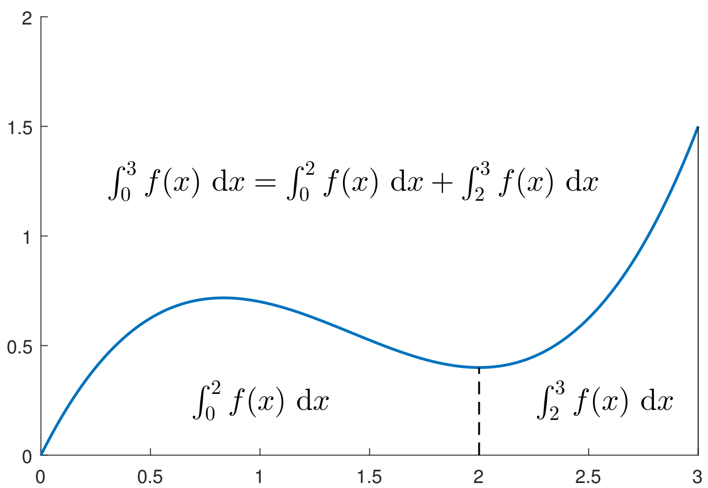
$$\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_1^2 3f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 3f(x)\ \mathrm{d}x$$

Eftersom denna integral täcker intervallet $[0, 1]$ och den andra integralen i ekvation (1) täcker intervallet $[1, 3]$, och de två integralerna har samma integrand, så kan vi addera dem:

$$\int_0^1 3f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^3 3f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^3 3f(x)\ \mathrm{d}x$$

Det enda som återstår är att subtrahera den tredje termen i ekvation (1):

$$(1) = \int_0^3 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^3 2f(x)\ \mathrm{d}x = 3 * \int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x - 2 * \int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x.$$



Figur 2: Arean mellan x-axeln och grafen till $f(x)$ i intervallet $[0, 3]$ kan fås genom att beräkna arean över delintervallen $[0, 2]$ och $[2, 3]$ var för sig, och sedan summera de två areorna. Detta faktum kan skrivas i termer av integraler som $\int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}x$.

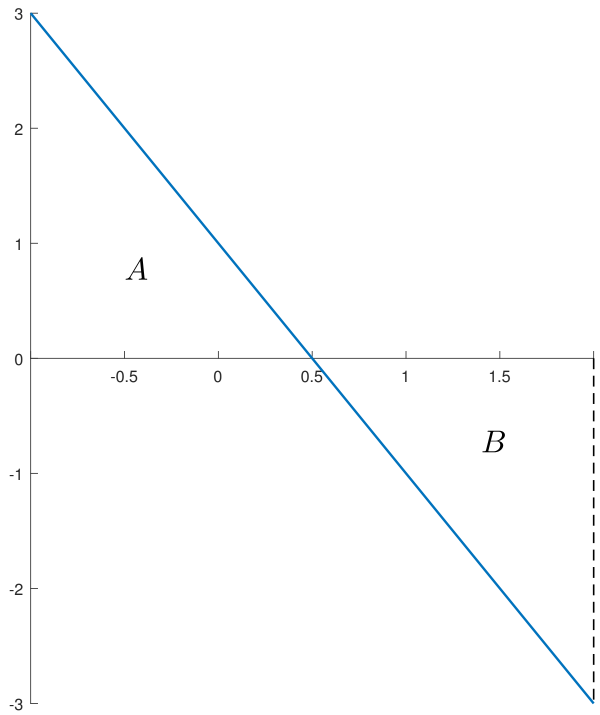
Problem 5.4.6

Utvärdera integralen

$$\int_{-1}^{2} (1 - 2x)\ \mathrm{d}x$$

genom att tolka integralen i termer av areor.

Lösning: Vi börjar med att plotta funktionen:



Figur 3

Som vi ser kan regionen mellan x-axeln och grafen delas in i två stycken trianglar A och B. Integralen är summan av dessa två trianglars areor, men eftersom triangeln B ligger nedanför x-axeln kommer dess area att räknas negativt:

$$\int_{-1}^{2} (1 - 2x)\ \mathrm{d}x = \mathrm{area}(A) - \mathrm{area}(B) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0.$$

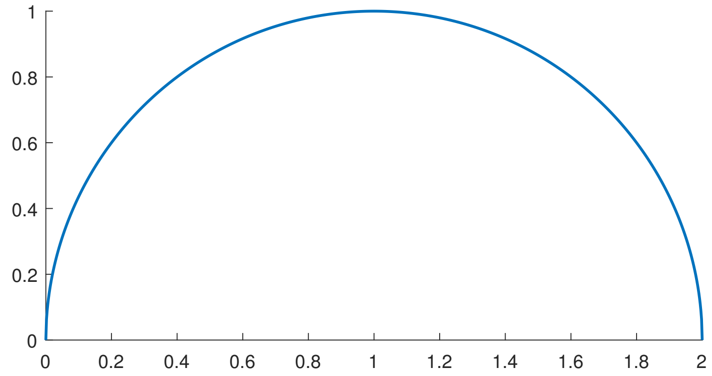
Problem 5.4.12

Utvärdera integralen

$$\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\ \mathrm{d}x$$

genom att tolka integralen i termer av areor.

Lösning: Vi börjar med att plotta funktionen:



Figur 4

Som vi ser bildar denna graf en halvcirkel med radie $r = 1$, så

$$\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\ \mathrm{d}x = \text{area}(\textit{halvcirkel}) = \frac{1}{2} * \pi r^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Problem 5.4.34*

Beräkna integralen

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x$$

där den styckvis kontinuerliga funktionen f ges av

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x\ , & x < 0 \\ 2\ , & x \geq 0 \end{cases}$$

Lösning: Vi delar upp integralen i två delar som låter oss utvärdera funktionen på varje del:

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} (1 + x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} 2\ \mathrm{d}x.$$

Vi kan beräkna de två integralerna var för sig genom att plotta funktionerna, så som vi har gjort i tidigare uppgifter. Om man gör detta så får man att

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{5}{2}.$$

Problem 5.5.4

Beräkna integralen

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \, \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi skriver om integranden med hjälp av negativa exponenter,

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = x^{-2} - x^{-3},$$

och använder deriveringsregeln $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1}$ baklänges på respektive term för att hitta den primitiva funktionen:

$$F(x) = -x^{-1} + \frac{1}{2} x^{-2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}.$$

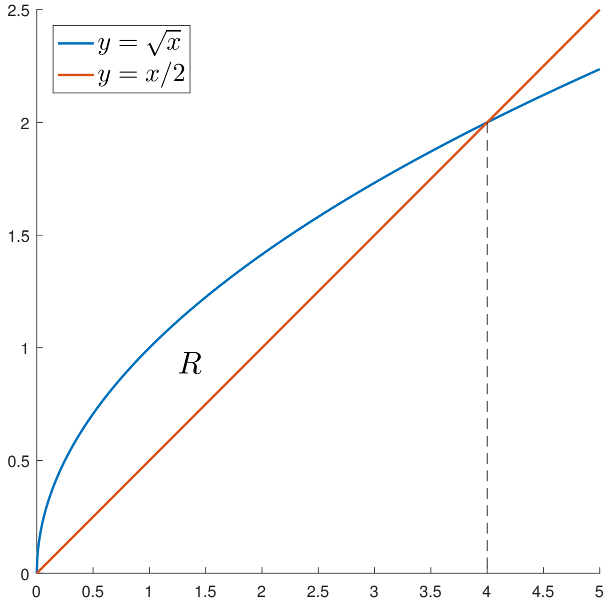
Integralen har därför värdet

$$\int_{-2}^{-1} x^{-2} - x^{-3} \, \mathrm{d}x = F(-1) - F(-2) = \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{8}.$$

Problem 5.5.26

Beräkna arean av den region R som ligger under grafen $y = \sqrt{x}$ och över grafen $y = \frac{x}{2}$.

Lösning: Vi börjar med att plotta de två graferna för att se hur regionen R ser ut.



Vi ser att de två graferna skär varandra i punkterna $x = 0$ och $x = 4$, så dessa är våra integrtionsgränser. Arean av regionen R kan nu beräknas via följande process:

Steg 1. Beräkna arean mellan grafen $y = \sqrt{x}$ och x-axeln, det vill säga beräkna integralen

$$\int_0^4 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x,$$

Steg 2. Beräkna arean mellan grafen $y = x/2$ och x-axeln, det vill säga beräkna integralen

$$\int_0^4 x/2\ \mathrm{d}x,$$

Steg 3. Notera att arean av regionen R är arean i **Steg 1.** minus arean i **Steg 2.**

$$\text{area}(R) = \int_0^4 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x - \int_0^4 x/2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^4 = \frac{4}{3}.$$

Problem 5.5.42*

Beräkan derivatan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2\int_0^{x^2}\frac{\sin u}{u}\;\mathrm{d}u$$

Lösning: Integralkalkylens huvudsats säger att

$$\int_0^{x^2}\frac{\sin u}{u}\;\mathrm{d}u = F(x^2)-F(0),$$

där $F(u)$ är en primitiv funktion till $f(u)=\frac{\sin u}{u}$. Produktregeln för derivator ger nu att

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2\int_0^{x^2}\frac{\sin u}{u}\;\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2\Big(F(x^2)-F(0)\Big) =&\\ =\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2\right)\Big(F(x^2)-F(0)\Big)+x^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F(x^2)-F(0)\Big)\right) =&\\ =2x\Big(F(x^2)-F(0)\Big)-x^2\Big(2xf(x^2)-0\Big) =&\\ =2x\int_0^{x^2}\frac{\sin u}{u}\;\mathrm{d}u-2x\sin x^2.&\end{aligned}$$

Mer än såhär kan vi inte förenkla, då den primitiva funktionen $F(u)$ inte har något enkelt uttryck.

Problem 2.10.8

Beräkna den indefinita integralen

$$\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x$$

Lösning: Uppgiften är med andra ord att beräkna en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}$. Ett sätt är att hitta lösningen är att dela upp funktionen i två delar,

$$f(x) = \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x,$$

och använda en lista över derivator av trigonometriska funktioner för att se att $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x$. Det följer att

$$\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x\ \mathrm{d}x = \tan x + \sin x + C.$$

Problem 2.10.26

Använd trigonometriska identiteter som

$$\begin{cases} \sec^2 x = 1 + \tan^2 x, \\ \sin(2x) = 2\sin x \cos x, \\ \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

för att beräkna den indefinita integralen

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

Lösning: Låt oss använda den sistnämnda identiteten, som kan skrivas om på formen

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}.$$

Det följer att

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C.$$

Läsvecka 1, Övning 2

Problem 5.6.4

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int e^{2x} \sin\!\left(e^{2x}\right) \,\mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: När man stöter på såna här uppgifter vill man göra en variabelsubstitution $u = g(x)$, för något $g(x)$, som förenklar integranden genom att baka in någon del av integranden i termen

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}x.$$

Vi gör variabelsubstitutionen $u = e^{2x}$, för då försvinner faktorn e^{2x} ur integranden:

$$\int e^{2x} \sin\!\left(e^{2x}\right) \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = e^{2x} \\ \mathrm{d}u = 2e^{2x} \,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \sin u \,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos\!\left(e^{2x}\right) + C.$$

Problem 5.6.16

Utvärdera den indefinita integralen
$$\int \frac{x^2}{2+x^6}\ \mathrm{d}x.$$
Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: Hur tänker man när man löser en sån här uppgift? Jag tänker att jag vill bli av med faktorn x^2 i täljaren, för man kan nog inte enkelt bli av med nämnaren. Så låt oss sätta $u = x^3$.

$$\int \frac{x^2}{2+x^6}\ \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = x^3 \\ \mathrm{d}u = 3x^2\ \mathrm{d}x \end{array}\right] = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2+u^2}\ \mathrm{d}u$$

Integralen påminner mycket om derivatan för arctan, vi behöver bara göra om tvåan i nämnaren till en etta. Ett sätt att göra detta är via en till variabelsubstitution som byter ut u^2 mot $2v^2$, varefter vi kan faktorisera ut en tvåa från hela nämnaren.

$$\int \frac{1}{2+u^2}\ \mathrm{d}u = \left[\begin{array}{c} v = u/\sqrt{2} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}u/\sqrt{2} \end{array}\right] = \frac{\sqrt{2}}{3}\int \frac{1}{2+2v^2}\ \mathrm{d}v =$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+v^2}\ \mathrm{d}v = \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan v + C = \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}}\right).$$

Problem 5.6.18*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: Det är inte uppenbart hur man löser denna uppgift, så låt oss helt enkelt testa något och se vad som händer.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x\ \mathrm{d}x}{e^{2x} + 1} = \begin{bmatrix} u = e^x \\ \mathrm{d}u = e^x\ \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} = \arctan u + C = \arctan e^x + C.$$

I det här fallet gick vårt experiment bra, men ibland får man testa flera olika saker innan man hittar en fungerande approach.

Problem 5.6.42*

Utvärdera integralen

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \sin^5 x \, \mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: Låt oss skriva om integranden med hjälp av trigonometriska ettan:

$$\sin^5 x = \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x,$$

Då får vi

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \cos x \\ \mathrm{d}u = -\sin x \, \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int_{-1}^{1/\sqrt{2}} (1 - u^2)^2 \, \mathrm{d}u.$$

De nya integrationsgränserna är $u = \cos \pi/4 = 1/\sqrt{2}$ respektive $u = \cos \pi = -1$, och vi har bytt ordning på dem så att vi integrerar från -1 tilll $1/\sqrt{2}$ istället för från $1/\sqrt{2}$ till -1. Detta inför ett minustecken som tar ut minustecknet från $\mathrm{d}u = -\sin x \, \mathrm{d}x$, så ovanstående ekvation ska vara korrekt.

Att beräkna integralen är nu en enkel uppgift:

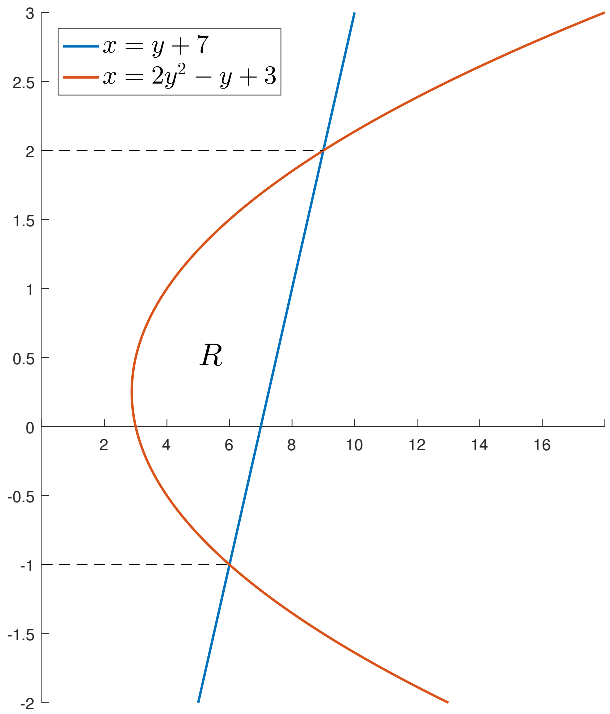
$$\int_{-1}^{1/\sqrt{2}} (1 - u^2)^2 \, \mathrm{d}u = \int_{-1}^{1/\sqrt{2}} 1 - 2u^2 + u^4 \, \mathrm{d}u = \left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right]_{-1}^{1/\sqrt{2}} = \frac{43}{60\sqrt{2}} + \frac{8}{15}.$$

Problem 5.7.6

Sketcha och beräkna arean hos den region som bestäms av kurvorna

$$x - y = 7, \qquad x = 2y^2 - y + 3.$$

Lösning: Vi börjar med att sketcha de två kurvorna, för att se hur regionen i fråga ser ut:



Figur 5

Vi vet att en integral på formen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ger arean mellan grafen till $f(x)$ och x-axeln, i intervallet $a \leq x \leq b$. På samma sätt ger integralen $\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$ arean mellan grafen till $f(y)$ och y-axeln, i intervallet $a \leq y \leq b$. Vi kan därför beräkna arean av regionen R genom att först beräkna arean till vänster om linjen $f(y) = y + 7$ och sedan subtrahera arean till vänster om kurvan $g(y) = 2y^2 - y + 3$:

$$\mathrm{area}(R) = \int_a^b 7 + y\ \mathrm{d}y - \int_a^b 2y^2 - y + 3\ \mathrm{d}y = \int_a^b (7 + y) - (2y^2 - y + 3)\ \mathrm{d}y,$$

där integrationsgränserna a, b är de två punkter där kurvorna skär varandra:

$$7 + y = 2y^2 - y + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1,\ y = 2.$$

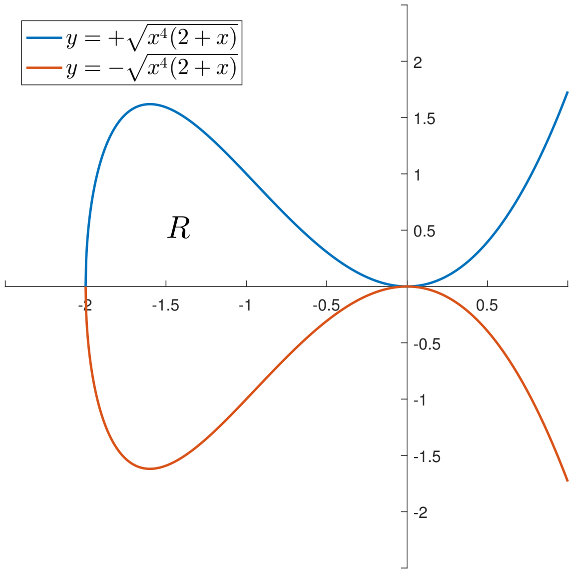
Arean är alltså

$$\mathrm{area}(R) = \int_{-1}^{2} -2y^2 + 2y + 4\ \mathrm{d}y = \left[-\frac{2}{3}y^3 + y^2 + 4y\right]_{-1}^{2} = 9.$$

Problem 5.7.28

Beräkna arean hos den region R som innesluts av loopen $y^2 = x^4(x+2)$ och som ligger till vänster om origo.

Lösning: Vi börjar med att sketcha regionen i fråga för att se hur den ser ut. Notera att loopen utgörs av de två graferna $y = +\sqrt{x^4(2+x)}$ och $y = -\sqrt{x^4(2+x)}$.



Figur 6

Som vi ser är regionen symmetrisk kring x-axeln, vilket innebär att halva arean ligger ovanför x-axeln och halva arean ligger nedanför. Det räcker därför att beräkna arean hos den övre halvan och sedan multiplicera med 2:

$$\begin{aligned}
\text{area}(R) &= 2\int_{-2}^{0} \sqrt{x^4(2+x)}\ \mathrm{d}x = 2\int_{-2}^{0} x^2\sqrt{2+x}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u^2 = 2+x \\ 2u\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \\
&= 2\int_{0}^{\sqrt{2}} (u^2-2)^2 u * 2u\ \mathrm{d}u = 4\int_{0}^{\sqrt{2}} u^6 - 4u^4 + 4u^2\ \mathrm{d}u = \\
&= 4\left[\frac{1}{7}u^7 - \frac{4}{5}u^5 + \frac{4}{3}u^3\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\left(\frac{\sqrt{128}}{7} - \frac{4\sqrt{32}}{5} + \frac{4\sqrt{8}}{3}\right) = \frac{256\sqrt{2}}{105}.
\end{aligned}$$

Problem 6.1.2

Beräkna integralen

$$\int (x+3)e^{2x}\ \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi sätter

$$U(x) = x+3, \qquad V(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

och partialintegrerar:

$$\begin{aligned}\int (x+3)e^{2x}\ \mathrm{d}x = \int U(x)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x = U(x)V(x) - \int \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}V(x)\ \mathrm{d}x &= \\ = \frac{1}{2}(x+3)e^{2x} - \frac{1}{2}\int 1 * e^{2x}\ \mathrm{d}x &= \\ = \frac{1}{2}(x+3)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.&\end{aligned}$$

Problem 6.1.8

Beräkna integralen

$$\int x^2 \arctan x \; \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi sätter

$$U(x) = \frac{1}{3}x^3, \qquad V(x) = \arctan x$$

och partialintegrerar:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \arctan x \; \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} V(x) \; \mathrm{d}x = U(x)V(x) - \int U(x) \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \; \mathrm{d}x &= \\
= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int x^3 * \frac{1}{1+x^2} \; \mathrm{d}x &= \\
= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) \; \mathrm{d}x &= \\
= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6} \ln\bigl(1+x^2\bigr) + C.&
\end{aligned}$$

Problem 6.1.14*

Beräkna integralen

$$\int xe^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x.$$

Lösning: Denna uppgift är lite lurig, det känns naturligt att sätta $U(x) = x$ och $V(x) = e^{\sqrt{x}}$ men detta kommer inte fungera. Istället gör vi en variabelsubstitution:

$$\int xe^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u^2 = x \\ 2u\ \mathrm{d}u = \ \mathrm{d}x \end{bmatrix} = 2\int u^3 e^u\ \mathrm{d}u = 2I_3,$$

där

$$\begin{aligned} I_n = \int u^n e^u\ \mathrm{d}u &= \begin{bmatrix} U = u^n, & V = e^u \\ \mathrm{d}U = nu^{n-1}\ \mathrm{d}u, & \mathrm{d}V = e^u\ \mathrm{d}u \end{bmatrix} = \\ &= \int U\ \mathrm{d}V = U(u)V(u) - \int V\ \mathrm{d}U = u^n e^u - nI_{n-1}. \end{aligned}$$

Vi får då att

$$\begin{aligned} &I_0 = e^u \\ \Rightarrow\ &I_1 = ue^u - e^u = (u-1)e^u \\ \Rightarrow\ &I_2 = u^2e^u - 2(u-1)e^u = (u^2 - 2u + 2)e^u \\ \Rightarrow\ &I_3 = u^3e^u - 3(u^2 - 2u + 2)e^u = (u^3 - 3u^2 + 6u - 6)e^u \end{aligned}$$

Svaret är med andra ord

$$\int xe^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = 2(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6)e^{\sqrt{x}}.$$

Problem 6.3.2

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\ \mathrm{d}x.$$

Lösning: Om vi sätter $2x = \sin u$ så kommer nämnaren att få den enkla formen $\cos u$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 2x = \sin u \\ 2\ \mathrm{d}x = \cos u\ \mathrm{d}u \end{bmatrix} &= \frac{1}{8}\int \sin^2 u\ \mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{16}\int (1-\cos 2u)\ \mathrm{d}u = \\
&= \frac{u}{16} - \frac{\sin 2u}{32} + C = \\
&= \frac{1}{16}\arcsin 2x - \frac{1}{16}\sin u \cos u + C = \\
&= \frac{1}{16}\arcsin 2x - \frac{1}{8}x\sqrt{1-4x^2} + C.
\end{aligned}$$

Problem 6.3.5*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9-x^2}}.$$

Lösning: I detta fall sätter vi $x = 3\sin\theta$ för att roten i nämnaren ska bli $3\cos\theta$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \left[\begin{array}{c} x = 3\sin\theta \\ \mathrm{d}x = 3\cos\theta\ \mathrm{d}\theta \end{array}\right] = \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta} = -\frac{1}{9}\cot\theta + C = \frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C.$$

Problem 6.3.44*

Använd substitutionen $x = \tan(\theta/2)$ för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}.$$

Lösning: Vi gör helt enkelt som uppgiften säger.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta} &= \left[\begin{array}{ll} x = \tan\frac{\theta}{2}, & \cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \\ \mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, & \sin\theta = \frac{2x}{1+x^2} \end{array}\right] = \\
&= \int_0^1 \frac{\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)} = \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \Big[\ln|1+x|\Big]_0^1 = \ln 2.
\end{aligned}$$

Läsvecka 2, Övning 1

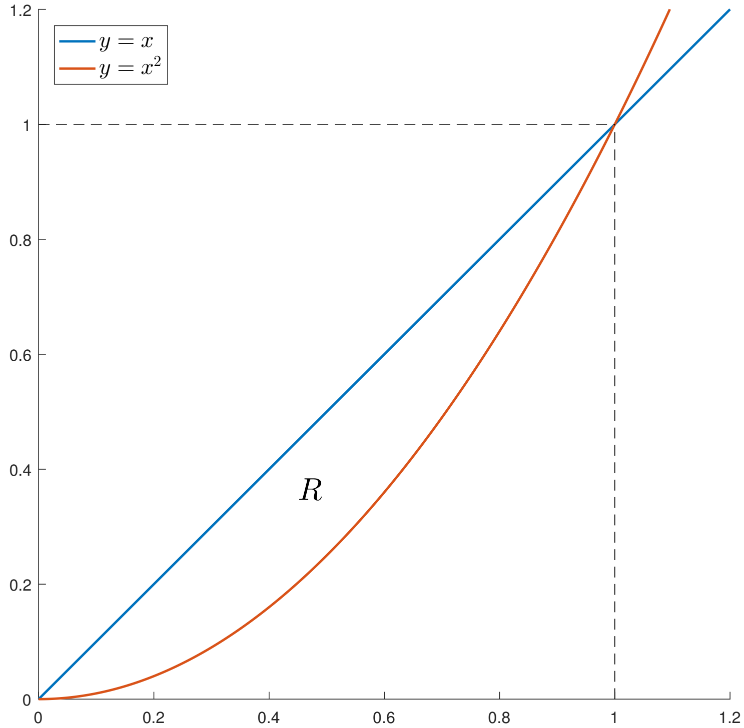
Problem 7.1.6

Låt R vara den tvådimensionella yta som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = x^2$. Beräkna volymen av den solid som erhålles om vi roterar ytan R ett varv runt

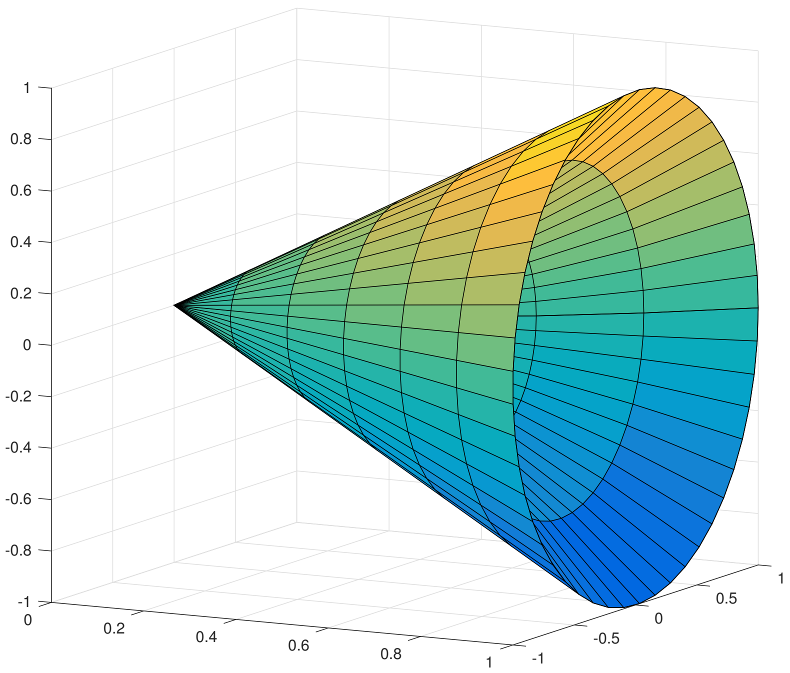
(a) x-axeln,

(b) y-axeln.

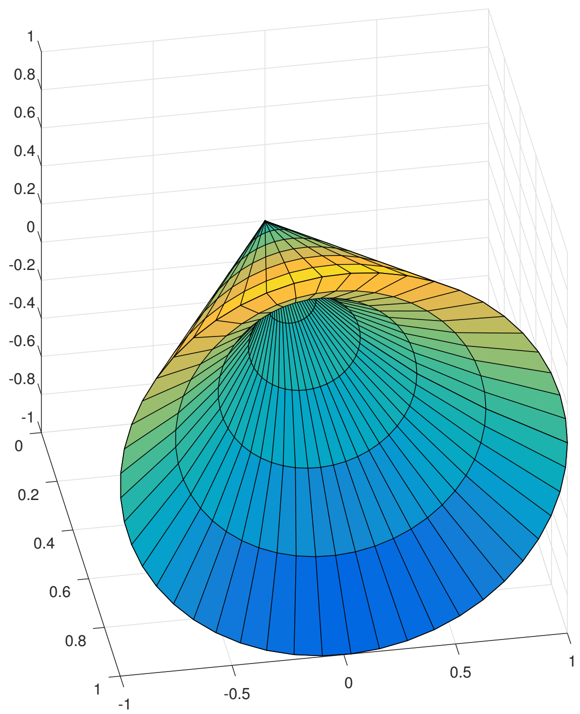
Lösning: Låt oss börja med att måla upp den aktuella regionen (Figur 7) och den solid som erhålls genom rotation kring x-axeln (Figurer 8-9).



Figur 7



Figur 8



Figur 9

I tidigare uppgifter har vi beräknat arean hos en tvådimensionell region R, begränsad av två stycken kurvor $y = f(x)$ och $y = g(x)$, genom att först beräkna arean under den översta kurvan och sedan subtrahera arean under den lägre kurvan. Här gör vi något liknande: först beräknar vi volymen hos den solid som erhålls när vi roterar den övre kurvan $y = x$ kring den valda axeln, sedan subtraherar vi volymen hos den solid som erhålls när vi roterar den nedre kurvan $y = x^2$ kring samma axel. Med andra ord beräknar vi volymen av konen i Figurerna 8-9 som om den vore en helt solid kon utan insida, och sedan subtraherar vi volymen av konens insida.

När vi roterar en kurva $f(x)$ kring x-axeln så bildas en cirkel för varje x-värde (Figur 10-11). Eftersom kurvan ligger på avståndet $f(x)$ från x-axeln så kommer motsvarande cirkel att ha radien $r = f(x)$ och ytarean $A(x) = \pi r^2 = \pi f(x)^2$. Volymen av soliden fås genom att "summera alla ytareaor", det vill säga genom att integrera över det aktuella intervallet:

$$V = \int_a^b A(x)\ \mathrm{d}x = \pi \int_a^b f(x)^2\ \mathrm{d}x.$$

Vi ska som sagt beräkna volymen mellan den kon som bildas när vi roterar $y = x$ kring x-axeln och den trumpetliknande yta som bildas när vi roterar $y = x^2$ kring samma axel. Volymen blir

$$V = \underbrace{\pi \int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x}_{V_{\text{kon}}} - \underbrace{\pi \int_0^1 (x^2)^2\ \mathrm{d}x}_{V_{\text{trumpet}}} = \pi \int_0^1 x^2 - x^4\ \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

När vi istället roterar ytan kring y-axeln så gör vi precis likadant men vi skriver om kurvorna som funktioner $x = f(y)$ och integrerar med avseende på y:

$$y = x \iff x = y, \qquad y = x^2 \iff x = \sqrt{y} \quad (x \geq 0).$$

Som vi ser skär de två kurvorna varandra i punkterna $y = 0$ respektive $y = 1$, så vi får samma integrationsgränser som ovan. Volymen blir

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 - y^2\ \mathrm{d}y = \pi \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

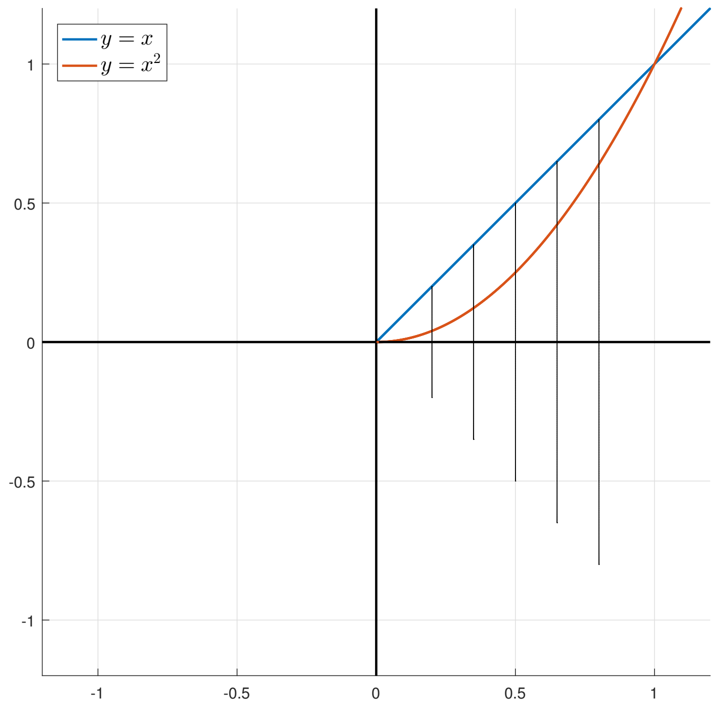
Ett snabbbare sätt att få samma svar är via integralen

$$2\pi \int_0^1 x(f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x(x - x^2)\ \mathrm{d}x = 2\pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

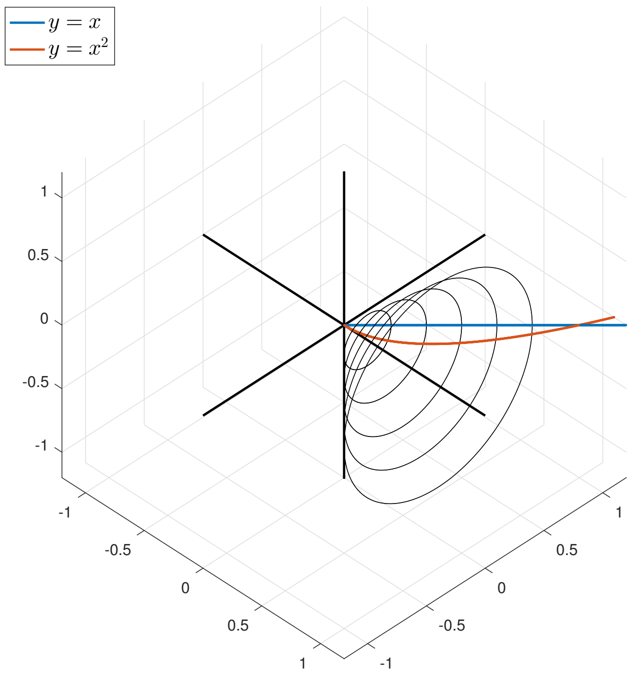
Denna metod är snabbare eftersom den inte kräver att vi skriver om kurvorna på formen $x = f(y)$ och hittar motsvarande integrationsgränser, men jag tycker det är svårare att visualisera hur denna metod fungerar. Idén är att vi för varje x bildar en cylinder med omkretsen $2\pi x$ och höjden $f(x)$, vilket ger ytarean $2\pi x f(x)$. Volymen av soliden fås sedan genom att "summera ihop" alla dessa ytareor, det vill säga integrera över x.

Ni är tillåtna att använda vilken metod ni vill.

Svar: Soliden som bildas när vi roterar kring x-axeln har volymen $\frac{2\pi}{15}$ och soliden som bildas när vi roterar kring y-axeln har volymen $\frac{\pi}{6}$.



Figur 10



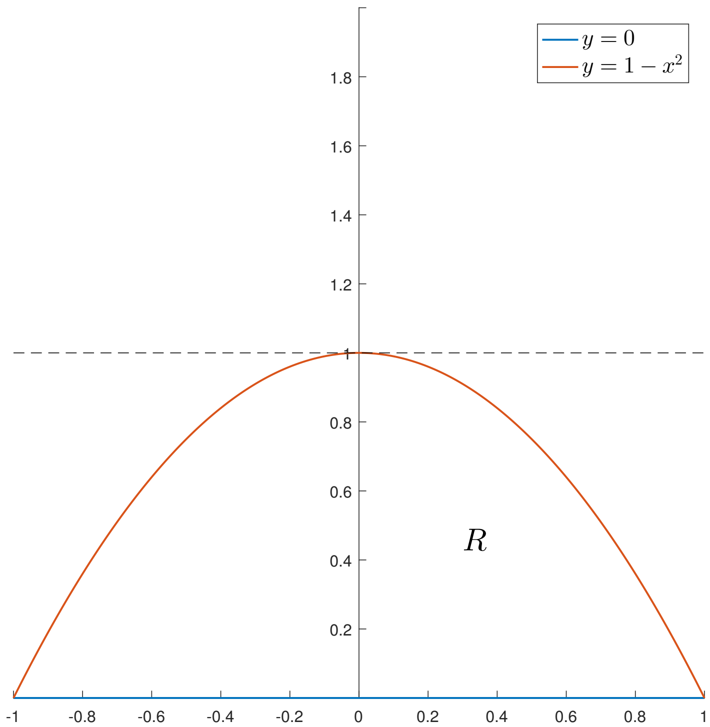
Figur 11

Problem 7.1.12

Beräkna volymen av den solid som bildas när vi roterar regionen $0 \leq y \leq 1 - x^2$ kring linjen $y = 1$.

Lösning: Ett sätt att lösa denna uppgift är att flytta integrationsaxeln till x-axeln via variabelsubstitutionen $u = y - 1$. Vi kan nu rotera regionen $-1 \leq u \leq -x^2$ kring linjen $u = 0$ (det vill säga x-axeln) och beräkna volymen precis som ovan:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (-1)^2 - (-x^2)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left[x - \frac{1}{5} x^5 \right]_{-1}^{1} = \frac{8\pi}{5}.$$



Figur 12

Problem 7.2.12

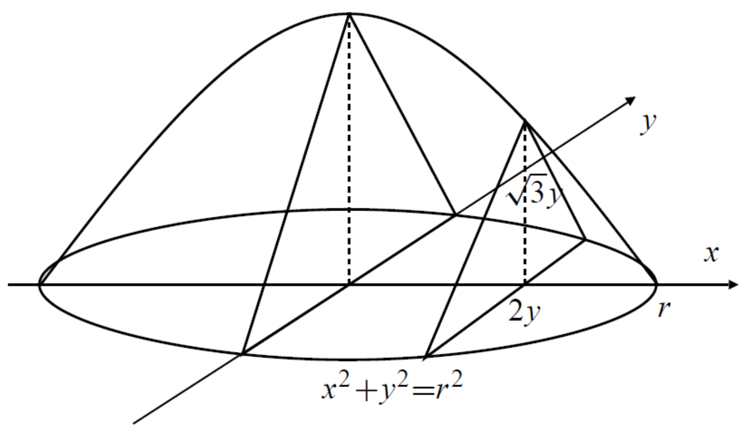
Betrakta en solid med cirkulär bas av radie r, och antag att samtliga tvärsnittsytor längsmed en given diameter är liksidiga trianglar. Beräkna solidens volym.

Lösning: Vi placerar soliden med centrum i origo och roterar den så att alla triangelformade tvärsnittsytor är parallella med y-axeln, se Figur 13. För varje x i intervallet $-r \leq x \leq r$ får vi en liksidig triangel med basen $b = 2y$ och höjden $h = \sqrt{3}y$, där vi har nyttjat att triangeln är liksidig. Triangelns tvärsnittsarea är alltså

$$A(x) = \frac{bh}{2} = \frac{2y * \sqrt{3}y}{2} = \sqrt{3}y^2 = \sqrt{3}(r^2 - x^2),$$

där vi har använd cirkels ekvation $x^2 + y^2 = r^2$. Allt som återstår är att "summera" alla tvärsnittsareor, det vill säga integrera över x:

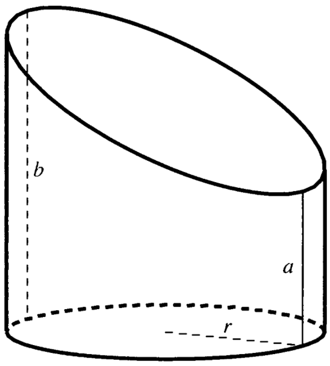
$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\ \mathrm{d}x = \sqrt{3}\int_{-r}^{r} r^2 - x^2\ \mathrm{d}x = \sqrt{3}\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{\sqrt{3}}r^3.$$



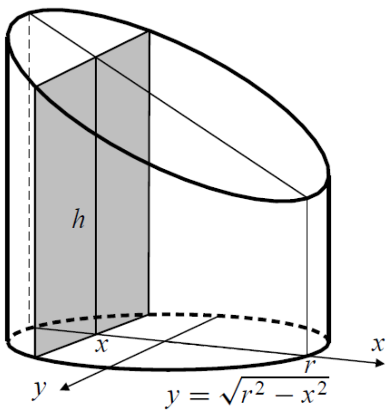
Figur 13: Bild tagen från *Instructor's Solution Manual.*

Problem 7.2.15

Betrakta en cirkulär cylinder med radie r, vars toppyta är ett lutande plan (Figur 14a). Om den lägsta och den högsta punkten på toppytan har höjden a respektive b, beräkna cylinderns volym.



(a) Bild från sida 402 i kursboken.



(b) Bild från *Instructor's Solution Manual.*

Figur 14

Lösning: Placera cylinderns mittpunkt i origo och vrid cylindern så att toppytans sluttning är parallell med x-axeln (Figur 14b). Notera att vi för varje x får en rektangel med någon bredd b och höjd h som båda beror av x. Cylinderns volym kan beräknas genom att summera ihop dessa rektanglars ytareor:

$$V = \int_{-r}^{r} b * h \, \mathrm{d}x.$$

Om cylindern har radie r så ligger x i intervalllet $-r \leq x \leq r$ och cylinderns höjd är en linjär funktion $h(x) = kx + m$. Eftersom vi har placerat cylindern med den högsta punkten längst till vänster ($x = -r$) och den lägsta punkten längst till höger ($x = r$) så får vi att

$$\begin{cases} a = h(r) = kr + m, \\ b = h(-r) = -kr + m \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{a-b}{2r}, \qquad m = \frac{a+b}{2}.$$

Höjden ges alltså av

$$h(x) = \frac{a-b}{2r}x + \frac{a+b}{2}.$$

Bredden fås genom cirkelns ekvation:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = r^2 - x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

och det framgår tydligt från Figur 14b rektangelns bredd är $b(x) = 2y = 2\sqrt{r^2 - x^2}$. Således är

$$V = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2} * \left(\frac{a-b}{2r}x + \frac{a+b}{2}\right) \, \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} (a+b)\sqrt{r^2 - x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2 (a+b)}{2}.$$

Problem 7.3.5

Beräkna längden på kurvan $y^3 = x^2$ från punkten $(-1, 1)$ till $(1, 1)$.

Lösning: Vi börjar med att skriva om kurvan som $y = x^{2/3}$, vilket ger derivatan $y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Som beskrivs på sida 405 i boken kan vi betrakta längden som en "summa" av båglängder,

$$L = \int_{x=-1}^{x=1} \mathrm{d}s, \qquad \text{där} \qquad \mathrm{d}s = \sqrt{1 + (y')^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^{-2/3}}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{3|x|^{1/3}}\ \mathrm{d}x$$

så låt oss helt enkelt beräkna denna integral:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{3|x|^{1/3}}\ \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{3x^{1/3}}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = 9x^{2/3} + 4 \\ \mathrm{d}u = 6x^{-1/3}\ \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{9}\int_{4}^{13} \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{2 * 13^{3/2} - 16}{27}. \end{aligned}$$

Pedagogisk lösning: Föreställ dig en partikel som färdas längsmed kurvan och vid tiden t har koordinaterna

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^{2/3}), \qquad -1 \leq t \leq 1.$$

Tidsvariabeln t är inget annat än den ursprungliga variabeln x, vi har satt $t = x$. Anledningen varför vi byter ut x mot en tidsvariabel är för att enklare kunna visualisera vad som händer. Frågan *hur lång är kurvan?* kan nu översättas till frågan *hur långt färdas partikeln under tidsintervallet* $-1 \leq t \leq 1$*?* och svaret på denna fråga får vi genom att undersöka partikelns fart; om partikeln färdas i 1 m/s i två sekunder, 5 m/s i tre sekunder, 0.2 m/s i fem sekunder, och så vidare, så kan vi beräkna färdsträckan som

$$L = (1\ \text{m/s}\ * 2\ \text{s}) + (5\ \text{m/s}\ * 3\ \text{s}) + (0.2\ \text{m/s}\ * 5\ \text{s}) + \cdots = \int_{-1}^{1} \text{partikelns fart}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Partikelns hastighet ges av tidsderivatan

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \left(1, \frac{2}{3}t^{-1/3}\right),$$

men vi är inte intresserade av vilken riktning partikeln färdas i, vi vill bara veta hur snabbt den färdas. Så vi beräknar farten som storleken på hastighetsvektorn:

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^{-2/3}} = \frac{\sqrt{9t^{2/3} + 4}}{3|t|^{1/3}}.$$

Svaret på uppgiften blir därför

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{1} \|\mathbf{r}'(t)\|\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{9t^{2/3} + 4}}{3|t|^{1/3}}\ \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{9t^{2/3} + 4}}{3t^{1/3}}\ \mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = 9t^{2/3} + 4 \\ \mathrm{d}u = 6t^{-1/3}\ \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{9}\int_{4}^{13} \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{2 * 13^{3/2} - 16}{27}. \end{aligned}$$

Problem 7.3.8

Beräkna längden på kurvan $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ från $x = 1$ till $x = 2$.

Lösning: Precis som i föregående uppgift börjar vi med att beräkna derivatan $y' = x^2 - \frac{1}{4x^2}$ och båglängdselementet

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)}\ \mathrm{d}x = \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)\ \mathrm{d}x.$$

Kurvlängden är integralen av detta båglängdselement:

$$L = \int_1^2 \mathrm{d}s = \int_1^2 x^2 + \frac{1}{4x^2}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x}\right]_1^2 = \frac{59}{24}.$$

Problem 7.3.20*

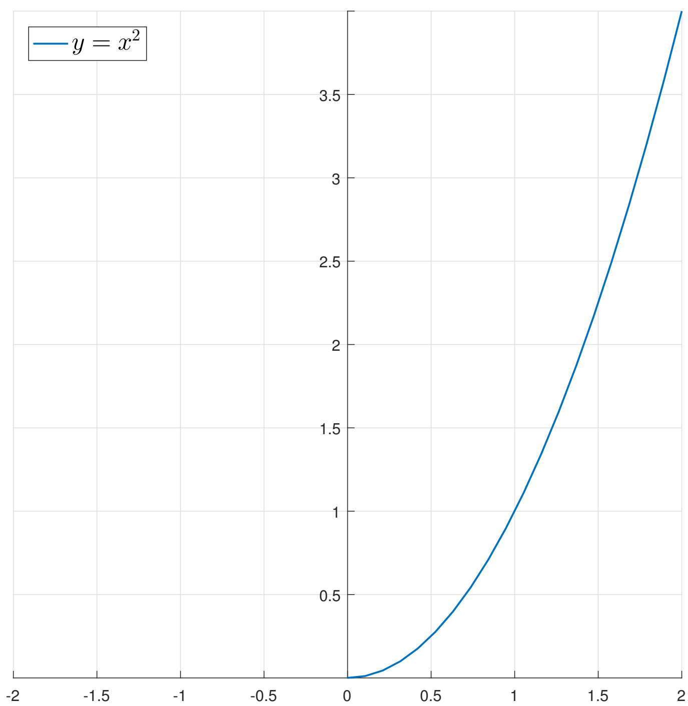
Beräkna ytarean hos den yta som bildas när vi roterar roterar kurvan

$$y = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 2$$

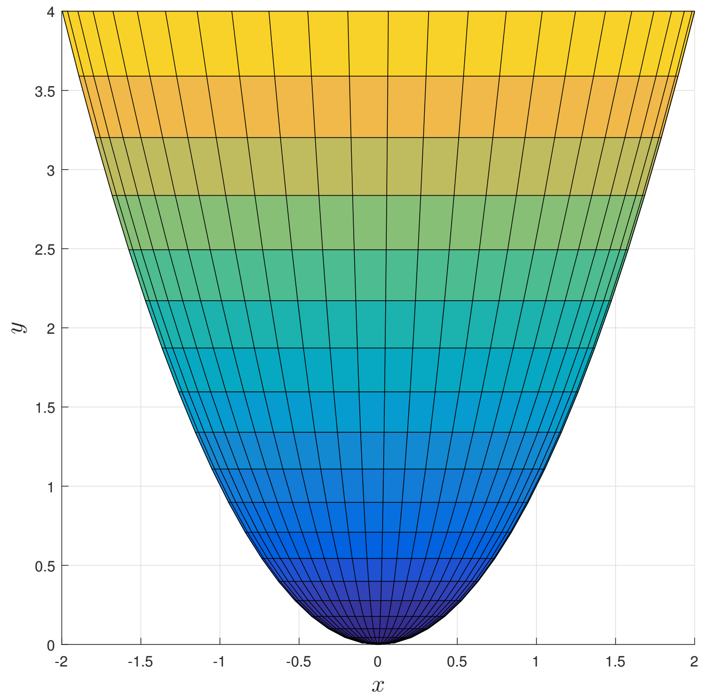
kring y-axeln.

Lösning: Kurvan $y = x^2$ är en parabolisk kurva (Figur 15), så när vi roterar den kring y-axeln får vi en djup skål (Figur 16-17). Denna skål utgörs av ett oändligt antal cirklar som bildas genom att vi, för varje värde på x, tar punkten (x, x^2) och roterar den ett varv runt y-axeln. Eftersom varje sådan cirkels radie bestäms av x-värdet ($r = x$) så har cirkeln omkretsen $2\pi r = 2\pi x$. Vi kan beräkna ytarean genom att "summera" dessa omkretser samtidigt som vi tar i åtanke hur kurvan böjs när vi går uppåt (båglängden):

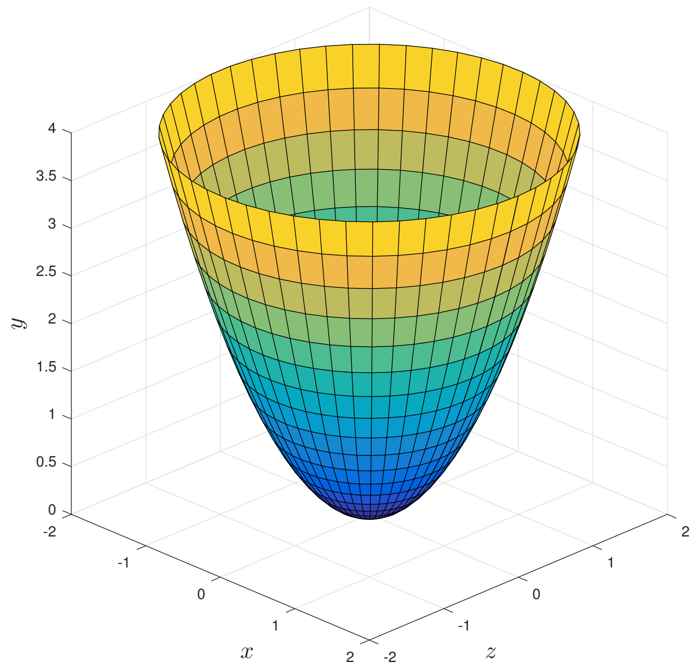
$$S = \int_0^2 2\pi x * \sqrt{1 + (y')^2}\ \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1 + 4x^2}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = 1 + 4x^2 \\ \mathrm{d}u = 8x \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{\pi}{4} \int_1^9 \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^9 = \frac{13\pi}{3}.$$



Figur 15: Grafen till funktionen $y = x^2$ för $0 \leq x \leq 2$.



Figur 16



Figur 17

Läsvecka 2, Övning 2

Problem 6.2.10

Utvärdera den indefinita integralen
$$\int \frac{x \, \mathrm{d}x}{3x^2 + 8x - 3}$$
Lösning: Vi börjar med att faktorisera nämnaren i integranden,
$$3x^2 + 8x - 3 = (3x - 1)(x + 3)$$
och skriva om integranden på formen
$$\frac{x}{3x^2 + 8x - 3} = \frac{A}{3x - 1} + \frac{B}{x + 3}.$$
Vi behöver alltså hitta uttryck A och B som uppfyller ovanstående ekvation:
$$\begin{aligned}
\frac{x}{3x^2 + 8x - 3} = \frac{A(x+3) + B(3x-1)}{3x^2 + 8x - 3} \quad & \Rightarrow \quad x = A(x+3) + B(3x-1) \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \quad x = (A + 3B)x + (3A - B) \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \quad A + 3B = 1, \ 3A - B = 0 \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \quad A = \frac{1}{10}, \ B = \frac{3}{10}.
\end{aligned}$$
Det följer att
$$\int \frac{x \, \mathrm{d}x}{3x^2 + 8x - 3} = \frac{1}{10} \int \frac{1}{3x - 1} + \frac{3}{x + 3} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{30} \ln|3x - 1| + \frac{3}{10} \ln|x + 3| + C.$$

Problem 6.2.20

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+2x^2+2x}$$

Lösning: Vi kan faktorisera ut ett x från nämnaren men mer än så går inte att faktorisera, eftersom polynomets två andra rötter är komplexa. Så vi vill skriva om integranden på formen

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3+2x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2} \quad &\Rightarrow \quad 1=A(x^2+2x+2)+(Bx+C)x \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad 1=(A+B)x^2+(2A+C)x+2A \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ C=-1.\end{aligned}$$

Det följer att[1]

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+2x^2+2x} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}-\frac{x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x= \\ &=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} u=x+1 \\ \mathrm{d}u=1\end{bmatrix}= \\ &=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u= \\ &=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|-\frac{1}{2}\arctan(x+1)+D.\end{aligned}$$

[1]Vi använder bokstaven D för integrationskonstanten eftersom bokstaven C redan används.

Problem 6.2.28

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

Lösning: Vi gör om integranden till en rationell funktion genom att sätta $u = \sin\theta$,

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)} = \begin{bmatrix} u = \sin\theta \\ \mathrm{d}u = \cos\theta\ \mathrm{d}\theta \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)(1+u)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)^2},$$

och i vanlig ordning skriver vi om integranden som en summa av enklare rationella funktioner:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-u)(1+u)^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C}{(1+u)^2} \quad &\Rightarrow \quad 1 = A(u^2+2u+1) + B(1-u^2) + C(1-u) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad 1 = (A-B)u^2 + (2A-C)u + (A+B+C) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad A-B=0,\ 2A-C=0,\ A+B+C=1 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad A = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{4},\ C = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Det följer att[2]

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)^2} &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = \\ &= -\frac{1}{4}\ln|1-u| + \frac{1}{4}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+u} + D = \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - \frac{1}{2(1+u)} + D = \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right| - \frac{1}{2(1+\sin\theta)} + D. \end{aligned}$$

[2]Vi använder bokstaven D för integrationskonstanten eftersom bokstaven C redan används.

Problem 6.5.8

Utvärdera integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\, \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi börjar med att beräkna den indefinita integralen:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x}}\, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u^2 = 1-x \\ 2u\, \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x \end{array}\right] = -2\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = -\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C.$$

De två integrationsgränserna är $x = 0 \Rightarrow u = 1$ och $x = 1 \Rightarrow u = 0$ så svaret borde vara

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\, \mathrm{d}x = \left[-\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right]_1^0,$$

men vi kan inte utvärdera den primitiva funktionen i punkten $u = 1$ eftersom nämnaren $u - 1$ då är lika med 0. Vi måste istället betrakta följande gränsvärde:

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\, \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 1^-} \left[-\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right]_\epsilon^0 = \lim_{\epsilon\to 1^-} \ln\left|\frac{\epsilon+1}{\epsilon-1}\right| = \infty.$$

Integralen divergerar.

Problem 6.5.10

Utvärdera integralen

$$\int_0^\infty xe^{-x}\ \mathrm{d}x$$

Lösning: Vi skriver om integralen som ett gränsvärde och partialintegrerar:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x}\ \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R xe^{-x}\ \mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} U = x, & V = -e^{-x} \\ \mathrm{d}U = \mathrm{d}x, & \mathrm{d}V = e^{-x}\ \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^R + \int_0^R e^{-x}\right) = \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-R}{e^R} - \frac{1}{e^R} + 1\right) = 1.
\end{aligned}$$

Integralen konvergerar.

Läsvecka 3, Övning 1

Problem 18.1.4

Klassificera differentialekvationen
$$y''' + xy' = x \sin x.$$

Lösning: Detta är en linjär, icke-homogen tredje ordningens differentialekvation, eftersom den innehåller tredjederivatan av y och alla termer är linjära:

$$(ay_1 + by_2)''' + x(ay_1 + by_2)' = a(y_1''' + xy_1') + b(y_2''' + xy_2'),$$

för alla funktioner y_1, y_2 och alla reella tal a, b. Eftersom högerledet $x \sin x$ inte är lika med 0 så är ekvationen inte homogen.

Problem 18.1.6

Klassificera differentialekvationen

$$y'' + 4y' - 3y = 2y^2$$

Lösning: Vi skriver om ekvationen så att alla termer innehållandes y hamnar i vänsterledet:

$$y'' + 4y' - 3y - 2y^2 = 0.$$

Detta är en ickelinjär andra ordningens differentialekvation, eftersom den innehåller andraderivatan av y och den ickelinjära termen y^2 gör ekvationen ickelinjär. Observera att vi inte säger något om homogenitet för att homogenitet bara är relevant för linjära ekvationer[3].

[3]**Kanske överkurs:** Anledningen varför homogenitet bara är relevant för linjära ekvationer är att lösningarna till en homogen linjär ekvation bildar ett vektorrum. Tag exempelvis den homogena, linjära ekvationen

$$2y'' - 5y = 0.$$

Om y_1, y_2 är lösningar på denna ekvation och om a, b är reella tal, så är

$$2(ay_1 + by_2)'' - 5(ay_1 + by_2) = a(2y_1'' - 5y_1) + b(2y_2'' - 5y_2) = a * 0 + b * 0 = 0, \tag{2}$$

så $ay_1 + by_2$ är också en lösning på ekvationen. Mängden av alla lösningar på ekvationen är därför ett delrum till vektorrummet av alla funktioner och man kan tillämpa verktyg från linjär algebra för att studera ekvationen. Om ekvationen däremot inte är homogen, säg

$$2y'' - 5y = f(x),$$

och om y_1, y_2 är lösningar på denna ekvation, så får vi att

$$2(ay_1 + by_2)'' - 5(ay_1 + by_2) = a(2y_1'' - 5y_1) + b(2y_2'' - 5y_2) = af(x) + bf(x) = (a + b)f(x),$$

så $ay_1 + by_2$ är bara en lösning om $a + b = 1$. Detta innebär att mängden av alla lösningar inte bildar ett vektorrum, eftersom en linjärkombination av två lösningar inte alltid är en lösning. Detta är anledningen varför vi gör skillnad på homogena och ickehomogena linjära differentialekvationer. Om differentialekvationen däremot är ickelinjär så bildar lösningarna inte ett vektorrum oavsett om $f(x) = 0$, så homogenitet är irrelevant.

Problem 2.10.40*

Finn lösningen på begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2} \\ y'(1) = 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

På vilket intervall gäller denna lösning?

Lösning: Andraderivatan y'' är ju derivatan av y', så vi kan hitta y' genom att integrera:

$$y' = \int y'' \, \mathrm{d}x = \int 5x^2 - 3x^{-1/2} \, \mathrm{d}x = \frac{5}{3}x^3 - 6x^{1/2} + C,$$

där konstanten C ges av begynnelsevärdet $y'(1) = 2$:

$$2 = y'(1) = \frac{5}{3} - 6 + C \quad \Rightarrow \quad C = 8 - \frac{5}{3} = \frac{19}{3}.$$

Vi finner funktionen y på samma sätt:

$$y = \int y' \, \mathrm{d}x = \int \frac{5}{3}x^3 - 6x^{1/2} + \frac{19}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{5}{12}x^4 - 4x^{3/2} + \frac{19}{3}x + D$$

där konstanten D ges av begynnelsevärdet $y(1) = 0$:

$$0 = y(1) = \frac{5}{12} - 4 + \frac{19}{3} + D \quad \Rightarrow \quad D = 4 - \frac{5}{12} - \frac{19}{3} = \frac{48 - 5 - 76}{12} = -\frac{33}{12} = -\frac{11}{4}.$$

Lösningen på begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y = \frac{5}{12}x^4 - 4x^{3/2} + \frac{19}{3}x - \frac{11}{4}.$$

Denna lösning gäller på hela den reella linjen, eftersom funktionen och alla dess derivator existerar för alla värden på x.

Problem 3.4.12

Om halveringstiden för radium är 1690 år, hur stor andel av den nuvarande mängden kommer finnas kvar efter

1. 100 år?
2. 1000 år?

Lösning: Låt $P(t)$ vara andelen radium som återstår efter t år, så att $P(0) = P_0 = 1$ eftersom andelen som återstår efter 0 år är 100%. Sönderfallshastigheten $P'(t)$ är proportionell mot den andel radium som återstår, $P'(t) = kP(t)$ för någon proportionalitetskonstant k. Detta innebär exempelvis att om vi dubblar mängden radium så kommer dubbelt så mycket att sönderfalla varje år, vilket känns ganska rimligt. Så vi hittar $P(t)$ genom att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} P(t) = kP'(t) \\ P(0) = 1 \end{cases}$$

Som vi vet har detta problem lösningen $P(t) = e^{kt}$. Vi kan även lista ut värdet på konstanten k eftersom vi vet halveringstiden: Andelen radium som återstår efter 1690 år ska vara $\frac{1}{2}$, så

$$\frac{1}{2} = P(1690) = e^{1690k} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{2} = 1690k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln(1/2)}{1690} = -\frac{\ln 2}{1690}.$$

Vi kan nu beräkna andelen som återstår efter 100 respektive 1000 år:

$$P(100) = e^{100k} = e^{-\frac{100}{1690}\ln(2)} \approx 0.96, \qquad P(1000) = e^{1000k} = e^{-\frac{1000}{1690}\ln(2)} \approx 0.66$$

Svar: Efter 100 år återstår 96% av den ursprungliga mängden radium; efter 1000 år återstår 66%.

Problem 3.4.26*

Ett objekt placeras i en frys som håller en konstant temperatur av $-5°C$. Om objektet kyls ned från $45°C$ till $20°C$ på 40 minuter, hur många fler minuter tar det att kyla ner objektet till $0°C$?

Lösning: Låt $T(t)$ vara objektets temperatur t minuter efter att dess temperatur var $45°C$. Med andra ord är $T(0) = 45$ och $T(40) = 20$. Hastigheten med vilken temperaturen sjunker ges av *Newton's law of cooling*:

> "A hot object introduced into a cooler environment will cool at a rate proportional to the excess of its temperature above that of its environment."

(Sida 185 i min upplaga av kursboken.)

Detta innebär att $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T(t) + 5)$ för någon proportionalitetskonstant k. Om vi sätter $u(t) = T(t) + 5$ så får vi begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = ku \\ u(0) = 50 \end{cases}$$

vilket har lösningen

$$u(t) = 50e^{kt}.$$

Vi kan även lista ut värdet på konstanten k eftersom vi vet temperaturen efter $t = 25$ minuter:

$$25 = u(40) = 50e^{40k} \quad \Rightarrow \quad 40k = \ln\frac{25}{50} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{40}\ln\frac{1}{2}.$$

Nu kan vi allt om funktionen $u(t)$ och det är dags att lösa uppgiften. Vi vill beräkna den tid t för vilken temperaturen $T(t) = 0$, det vill säga $u(t) = 5$. Vi får att

$$5 = u(t) = 50e^{kt} \quad \Rightarrow \quad kt = \ln\frac{5}{50} \quad \Rightarrow t = \frac{1}{k}\ln\frac{1}{10} = 40\frac{\ln(1/10)}{\ln(1/2)} \approx 132.88 \text{ minuter.}$$

Det tar alltså ca. $132.88 - 40 = 92.88$ minuter till att kyla ned objektet till $0°C$.

Problem 7.9.6

Lös den separabla ekvationen
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^x \sin t.$$
Lösning: Vi flyttar över alla x till vänsterledet och alla t till högerledet,
$$e^{-x}\ \mathrm{d}x = \sin t\ \mathrm{d}t$$
och integrerar på båda sidor:
$$\int e^{-x}\ \mathrm{d}x = \int \sin t\ \mathrm{d}t \qquad \iff \qquad -e^{-x} = -\cos t + C.$$
Det följer att $x(t) = -\ln(\cos t + C)$.

Problem 7.9.16

Lös den separabla ekvationen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2e^x y = e^x.$$

Lösning: Vi flyttar över alla y till vänsterledet och alla x till högerledet,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x(1-2y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{1-2y}\ \mathrm{d}y = e^x\ \mathrm{d}x,$$

och integrerar på båda sidor:

$$\int \frac{1}{1-2y}\ \mathrm{d}y = \int e^x\ \mathrm{d}x \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{2}\ln(1-2y) = e^x + C.$$

Det följer att

$$1-2y = e^{-2e^x+C} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2(e^x+C)} = \frac{1}{2} + De^{-2e^x},$$

där vi har satt $D = -\frac{1}{2}e^{2C}$. Svaret är alltså

$$y = \frac{1}{2} + De^{-2e^x}.$$

Problem 7.9.18

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3x^2 y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Lösning: Vi börjar med att separera variablerna,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2(1-3y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{1-3y}\ \mathrm{d}y = x^2\ \mathrm{d}x,$$

och integrera:

$$\int \frac{1}{1-3y}\ \mathrm{d}y = \int x^2\ \mathrm{d}x \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{3}\ln(1-3y) = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Det följer att

$$1 - 3y = e^{-x^3-C} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-x^3-C} = \frac{1}{3} + De^{-x^3},$$

där vi har satt $D = -\frac{1}{3}e^{-C}$. Begynnelsevärden ger oss ett specifikt värde på konstanten:

$$1 = y(0) = \frac{1}{3} + D \quad \Rightarrow \quad D = \frac{2}{3},$$

så lösningen är alltså

$$y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-x^3}.$$

Läsvecka 3, Övning 2

Problem 3.7.4

Hitta den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$4y'' - 4y' - 3y = 0.$$

Lösning: Vi vill undersöka om ekvationen har en lösning på formen $y = e^{rt}$. I så fall är

$$0 = 4y'' - 4y' - 3y = 4r^2 e^{rt} - 4re^{rt} - 3e^{rt} = (4r^2 - 4r - 3)e^{rt},$$

vilket implicerar att $4r^2 - 4r - 3 = 0$ eftersom e^{rt} inte kan vara lika med 0. PQ-formeln eller valfri annan metod ger oss polynomets två rötter $r_1 = -\frac{1}{2}$ och $r_2 = \frac{3}{2}$, det vill säga att

$$y = e^{(-1/2)t} \qquad \text{och} \qquad y = e^{(3/2)t}$$

är lösningar. Ekvationen är dessutom linjär, vilket innebär att alla linjärkombinationer

$$y = Ae^{(-1/2)t} + Be^{(3/2)t}$$

är lösningar. Faktum är att samtliga lösningar kan skrivas på denna form, det finns inga andra lösningar. Den som vill försöka bevisa detta faktum kan ta sig en titt på Problem 3.7.18 i boken.

Problem 3.7.14

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$$

Lösning: Precis som i föregående uppgift söker vi efter lösningar på formen $y = e^{rt}$. Vi får att

$$0 = y'' + 10y' + 25y = (r^2 + 10r + 25)e^{rt},$$

vilket implicerar att $0 = r^2 + 10r + 25 = (r+5)^2$. Detta polynom har den enda roten $r = -5$. Den allmänna lösningen är därför på formen

$$y = Ae^{-5t} + Bte^{-5t}.$$

För att förstå varifrån koeffcienten Bt kommer, se **CASE II** i början av sektion 3.7 i kursboken. Derivatan av den allmänna lösningen blir

$$y' = -5Ae^{-5t} + (1-5t)Be^{-5t}$$

och vi kan använda begynnelsevärdena för att hitta värden på A och B:

$$\begin{cases} 0 = y(1) = Ae^{-5} + Be^{-5} = (A+B)e^{-5} \\ 2 = y'(1) = -5Ae^{-5} - 4Be^{-5} = (-5A - 4B)e^{-5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -5A - 4B = 2e^5 \end{cases}$$

Det följer att $B = -A$ och om vi sätter in detta värde i den nedre ekvationen till höger så får vi

$$-5A + 4A = 2e^5 \quad \Longleftrightarrow \quad A = -2e^5.$$

Alltså är $B = 2e^5$, så lösningen på vårt begynnelsevärdesproblem är

$$y = -2e^{-5(t-1)} + 2te^{-5(t-1)} = 2(t-1)e^{-5(t-1)}.$$

Problem 3.7.24

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

Bestäm lösningens vinkelfrekvens, frekvens, period och amplitud.

Lösning: Den allmänna lösningen på den här typen av uppgifter är

$$y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

för några konstanter A, B och någon vinkelfrekvens ω. Notera att

$$y'' = -\omega^2 A\cos(\omega t) - \omega^2 B\sin(\omega t) = -\omega^2 y,$$

från vilken vi drar slutsatsen att $\omega^2 = 4$. Detta skulle kunna innebära antingen att $\omega = -2$ eller att $\omega = +2$ men det visar sig att båda alternativen ger upphov till exakt samma lösning, så det spelar ingen roll vilket alternativ vi väljer. Av ren konvention väljer vi därför den positiva vinkelfrekvensen $\omega = 2$. Begynnelsevillkoren säger oss även att

$$\begin{cases} 2 = y(0) = A * 1 + B * 0 = A \\ -5 = y'(0) = -\omega A * 0 + \omega B * 1 = \omega B = 2B, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = -5/2 \end{cases},$$

så den allmänna lösningen är

$$y = 2\cos(2t) - \frac{5}{2}\sin(2t).$$

Definitionerna av de fyra kvantiteterna som vi ska beräkna står i Sektion 3.7 i kursboken. Jag rekommenderar er att läsa denna sektion och försöka förstå innebörden hos de fyra termerna, de är viktiga inom fysik rent generellt och säkerligen även inom kemi. Den harmoniska oscillatorn är en av de viktigaste modellerna inom modern fysik.

- **Amplituden** är $R = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{4 + 25/4} = \sqrt{41}/2$.
- **Vinkelfrekvensen** är $\omega = 2$.
- **Perioden** är $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
- **Frekvensen** är $1/T = 1/\pi$.

Problem 18.6.4

Finn den allmänna lösningen på differentialekvationen

$$y'' + y' - 2y = e^x \tag{3}$$

via metoden om obestämda koefficienter.

Lösning: Vi börjar med att leta efter en lösning på formen $y_h = e^{rx}$ till den homogena ekvationen

$$y_h'' + y_h' - 2y_h = 0, \tag{4}$$

ty varje lösning på den inhomogena ekvationen (3) kan skrivas som en partikulärlösning plus en lösning på den homogena ekvationen. Med andra ord räcker det att vi hittar *en* lösning y på den inhomogena ekvationen, eftersom alla andra lösningar kan skrivas som $y + y_h$ för någon lösning y_h till den homogena ekvationen.

Ansätt $y = e^{rt}$. Om vi beräknar derivatorna i vänsterledet så får vi polynomekvationen

$$r^2 + r - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r+2)(r-1) = 0,$$

vilket ger lösningarna $y_h = e^{-2x}$ och $y_h = e^x$. Den allmänna lösningen på den homogena, linjära ekvationen (4) är en godtycklig linjärkombination av dessa två:

$$y_h = Ae^x + Be^{-2x}.$$

Metoden om obestämda koefficienter handlar egentligen bara om att göra en kvalificerad gissning om hur lösningen kan tänkas se ut. För den inhomogena ekvationen, ansätt

$$y = Cxe^x. \tag{5}$$

Om vi matar in den här funktionen i differentialekvationens vänsterled så får vi

$$y'' + y' - 2y = (2Ce^x + Cxe^x) + (Ce^x + Cxe^x) - 2Ce^x = 3Ce^x.$$

Högerledet ska vara lika med e^x, så vi drar slutsatsen att $C = \frac{1}{3}$. Den allmänna lösningen på den inhomogena ekvationen är således

$$y = \frac{1}{3}xe^x + \underbrace{Ae^x + Be^{-2x}}_{y_h}.$$

Överkurs: En av de vanligaste frågorna när man studerar differentialekvationer är *Hur vet vi att det inte finns ännu fler lösningar? Hur vet vi att vår lösning är den allmänna lösningen?* Detta är en mycket bra och högst befogad fråga som tyvärr är svår att besvara i vissa fall, eftersom svaret kan kräva avancerad matematik. När man läser sin första kurs om differentialekvationer så brukar man lära sig en uppsättning standardlösningar och bara bevisa *några* allmänna lösningar. När det gäller just **Problem 18.6.4.** så kan vi faktiskt bevisa att lösningen som vi fann är allmän:

Antag att $y'' + y' - 2y = e^x$ och skriv om den allmänna lösningen på formen $y = g(x)e^x$ för någon hittills okänd funktion g. Vi kan alltid göra denna omskrivning genom att multiplicera och dividera den allmänna lösningen med e^x:

$$y = \left(ye^{-x}\right)e^x = g(x)e^x, \qquad g(x) = ye^{-x}.$$

Om vi matar in denna lösning i differentialekvationen så får vi relationen

$$y'' + y' - 2y = \big[g''(x) + 2g'(x) + g(x)]e^x + [g'(x) + g(x)]e^x - 2g(x)e^x = e^x,$$

vilken vi kan skriva om som

$$[g''(x) + 3g'(x)]e^x = e^x \quad \iff \quad g''(x) + 3g'(x) = 1 \quad \iff \quad g'(x) + 3g(x) = x + C.$$

Differentialekvationen $g' + 3g = x + C$ löses av

$$g(x) = De^{-3x} + \frac{x}{3} + \frac{C}{3} - \frac{1}{9},$$

så den allmänna lösningen $y = g(x)e^x$ till den ursprungliga ekvationen är

$$y = g(x)e^x = \left(De^{-3x} + \frac{x}{3} + \frac{C}{3} - \frac{1}{9}\right)e^x = \frac{1}{3}xe^x + Ae^x + Be^{-2x},$$

där vi har satt $A = \frac{C}{3} - \frac{1}{9}$ och $B = D$.

Problem 18.6.6

Finn den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen

$$y'' + 4y = x^2$$

via metoden om obestämda koeffcienter.

Lösning: Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen

$$y_h'' + 4y_h = 0.$$

Vi vet sedan tidigare att den allmänna lösningen på denna ekvation är

$$y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Högerledet x^2 i den inhomogena ekvationen är ett polynom, så låt oss leta efter ett polynom y som löser differentialekvationen. Mer specifikt bör y vara ett andragradspolynom

$$y = Ax^2 + Bx + C., \tag{6}$$

för om y istället hade varit, säg, ett tredjegradspolynom så skulle även $y'' + 4y$ vara ett tredjegradspolynom, och skulle därför inte kunna vara lika med andragradspolynomet x^2 i högerledet.

När vi matar in ekvation (6) i differentialekvationen så får vi

$$y'' + 4y = 4Ax^2 + 4Bx + (2A + 4C) = x^2,$$

vilket implicerar att $A = 1/4$, $B = 0$, och $C = -1/8$. Den allmänna lösningen är således

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Problem 18.6.12

Finn den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

via metoden om obestämda koeffcienter.

Lösning: Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

När vi matar in ansatsen $y = e^{rx}$ i högerledet så får vi relationen

$$(r^2 + 2r + 1)e^{rx} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 + 2r + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r+1)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = -1,$$

så den homogena ekvationen har den allmänna lösningen

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^{-x}.$$

Högerledet i den inhomogena ekvationen är ett polynom x multiplicerat med e^{-x}, så låt oss leta efter en partikulärlösning på samma form: ett polynom gånger e^{-x}. Vi behöver inte bry oss om termer av grad 0 och grad 1 eftersom vi kan placera dem i den homogena lösningen y_h, så vi begränsar oss till termer av grad 2 och grad 3:

$$y = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x},$$

Om vi inte skulle hitta en partikulärlösning på ovanstående form så skulle vi kunna prova termer av grad 4, grad 5, etc. men i detta fall visar sig grad 3 vara tillräckligt. För detta polynom ger

$$\begin{cases} y = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x} \\ y' = (3Ax^2 + 2Bx)e^{-x} - y \\ y'' = (6Ax + 2B)e^{-x} - (3Ax^2 + 2Bx)e^{-x} - y' = \\ \quad = (6Ax + 2B)e^{-x} - 2y' - y \end{cases} \tag{7}$$

vilket implicerar att

$$y'' + 2y' + y = \Big((6Ax + 2B)e^{-x} - 2y' - y\Big) + 2y' + y = (6Ax + 2B)e^{-x} = xe^{-x}.$$

Vi drar slutsatsen att $A = \frac{1}{6}$ och $B = 0$. Den allmänna lösningen är alltså

$$y = \frac{1}{6}x^3 e^{-x} + y_h = \left(\frac{1}{6}x^3 + C_2 x + C_1\right) e^{-x}.$$

Uppgifter ur Lay

Läsvecka 4, Övning 1

Problem 1.1.18 (repetition)

Har de tre planen $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$, $x_2 - x_3 = 1$, och $x_1 + 3x_2 = 0$ någon punkt gemensamt? Förklara.

Lösning: Om de tre planen har en punkt (x_1, x_2, x_3) gemensamt så måste denna punkt uppfylla alla tre ekvationer ovan. Med andra ord måste punkten uppfylla ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ \qquad x_2 - x_3 = 1 \\ \quad x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}, \tag{8}$$

vilket vi kan representera på matrisform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Varje rad utgörs alltså av en ekvation i ekvationssystemet. Elementen i den första kolumnen representerar koefficienten framför x_1 i respektive ekvation, elementen i den andra kolumnen representerar koefficienten framför x_2 i respektive ekvation, elementen i den tredje kolumnen representerar koefficienten framför x_3 i respektive ekvation, elementen i den fjärde kolumnen representerar högerledet i respektive ekvation. Målet är att radreducera matrisen så att den får formen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & C \end{bmatrix},$$

eftersom denna matris representerar ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 = A \\ x_2 = B \\ x_3 = C \end{cases}.$$

Om vi lyckas med detta mål så kommer $x_1 = A$, $x_2 = B$, $x_3 = C$ lösa det ursprungliga ekvationssystemet (8), vilket innebär att punkten (A, B, C) är en gemensam punkt för de tre planen.

Dags att radreducera!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \Big[\text{Subtrahera första raden från tredje raden}\Big] \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Redan efter detta första steg kan vi faktiskt avbryta radreduceringen, eftersom de två nedersta raderna i matrisen motsäger varandra: Om en punkt (x_1, x_2, x_3) ligger på alla tre plan så säger ovanstående matris att punkten måste uppfylla både $x_2 - x_3 = 1$ och $x_2 - x_3 = -4$, vilket förstås inte är möjligt. **Slutsats:** De tre planen har inte någon punkt gemensamt.

Problem 1.2.4 (repetition)

Reducera matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

till *reduced echelon form*, det vill säga trappmatrisform. Ringa in pivotelementen i den ursprungliga matrisen och i den slutgiltiga matrisen, och lista pivotkolumnerna.

Lösning: När vi radreducerar, låt oss först göra oss av med trean och femman i första kolumnen, så att bara den översta ettan kvarstår. Sedan gör vi oss av med sjuan längst ned i andra kolumnen.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} && \left[\text{Subtrahera } 3 * \text{första raden från den andra raden}\right] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} && \left[\text{Subtrahera } 5 * \text{första raden från den tredje raden}\right] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -34 \end{bmatrix} && \left[\text{Subtrahera } 2 * \text{andra raden från den tredje raden}\right] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} && \left[\text{Dividera andra raden med } -4 \text{ och sista raden med } -10\right] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vi har ringat in pivot-elementen, och motsvarande pivot-element i den ursprungliga matrisen finnes på exakt samma positioner eftersom vi inte har arrangerat om några rader i matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivot-kolumnerna är precis de kolumner som innehåller pivot-element, det vill säga första, andra och fjärde kolumnen.

Vi avslutar med en observation. Precis som i föregående uppgift kan den ursprungliga matrisen tolkas som ett ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 9 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 1 \end{cases}$$

och syftet med att radreducera, syftet med att överföra matrisen på reducerad triangelmatrisform, *reduced echelon form*, är att den reducerade matrisen löser ovanstående ekvationssystem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \end{cases}$$

Den nedersta ekvationen säger oss att $0 = 1$, vilket förstås är omöjligt. Ekvationssystemet är alltså inkonsekvent och har inte någon lösning.

Problem 1.2.12 (repetition)

Finn den allmänna lösningen på ekvationssystemet som motsvarar matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Ekvationssystemet i fråga är

$$\begin{cases} 1x_1 - 3x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 0x_5 = -2 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 4x_5 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 9x_5 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0 \end{cases},$$

vilket vi kan skriva på den enklare formen

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_4 = -2 \\ \qquad x_2 - 4x_5 = 1 \\ \qquad x_4 + 9x_5 = 4 \end{cases}.$$

Variabeln x_3 tillåts ha vilket värde som helst eftersom den inte förekommer i ekvationssystemet. Notera även att om vi fixerar värdet på x_5 så kommer värdena på variablerna x_1, x_2 och x_4 vara helt bestämda, eftersom[4]

$$\begin{cases} x_4 = 4 - 9x_5 \\ x_2 = 1 + 4x_5 \\ x_1 = 3x_2 + x_4 - 2 = \\ \quad = 3(1 + 4x_5) + (4 - 9x_5) - 2 = \\ \quad = 5 + 3x_5 \end{cases}.$$

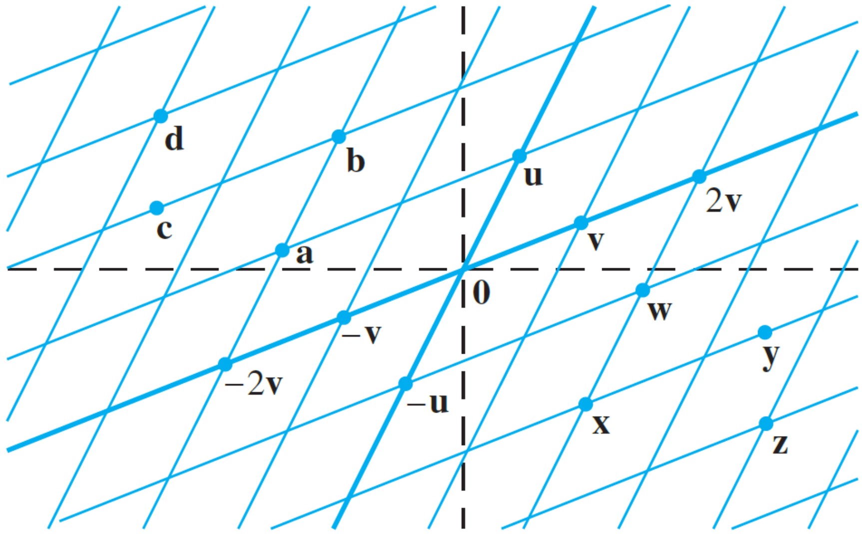
Den allmänna lösningen är därför

$$\begin{cases} x_1 = 5 + 3x_5 \\ x_2 = 1 + 4x_5 \\ x_3 \text{ fri variabel} \\ x_4 = 4 - 9x_5 \\ x_5 \text{ fri variabel} \end{cases}$$

[4]Vi hade även kunnat fixera värdet på x_4, i vilket fall värdena på x_1, x_2 och x_5 hade varit helt bestämda. Huvudsaken är att vi har två fria variabler.

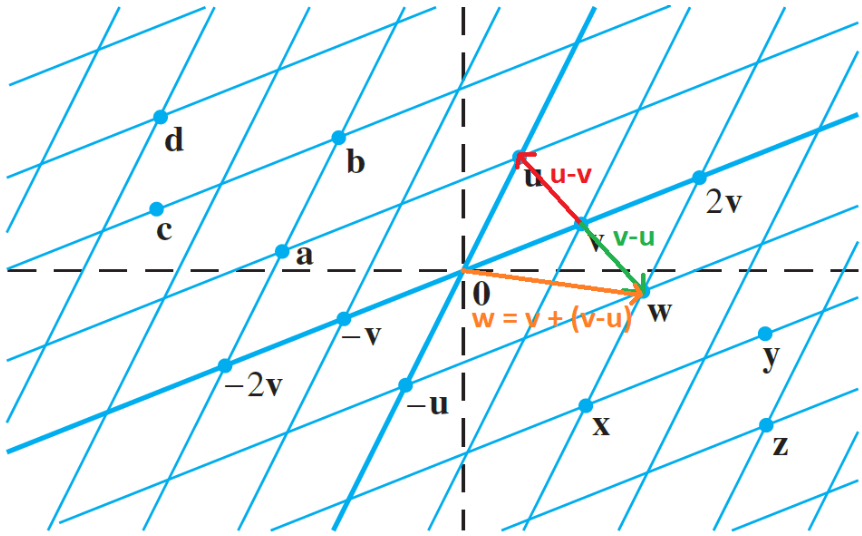
Problem 1.3.8

Använd följande figur för att skriva vektorerna **w**, **x**, **y** och **z** som linjärkombinationer av de två vektorerna **u** och **v**. Är varje vektor i $\mathbb{R}^2$ en linjärkombination av **u** och **v**?



Figur 18: Bild tagen från sida 32 i kursboken *Linear Algebra and Its Appliations* av Lay.

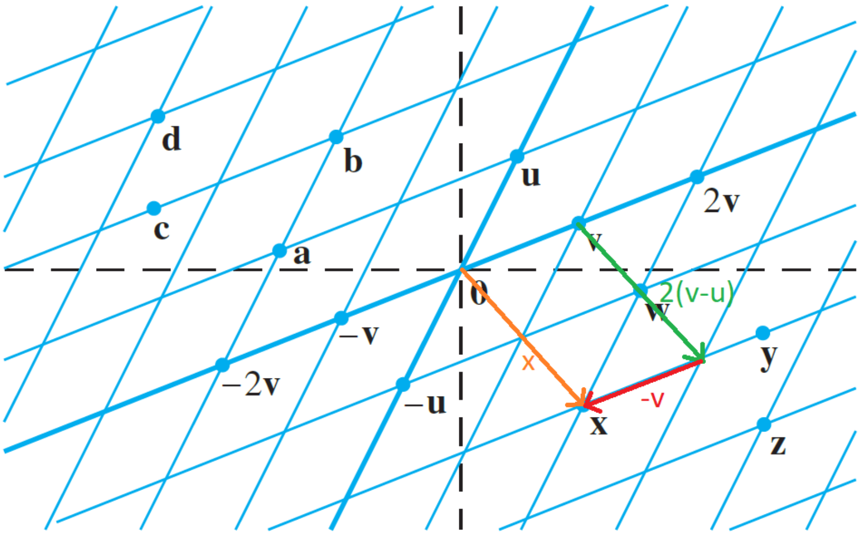
Lösning: Om vi befinner oss i punkten **v** (det vill säga vid spetsen av vektorn **v**) och vill ta oss till punkten **u** så kommer vektorn $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ att ta oss dit, eftersom $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u}$ (Figur 19). Om vi istället vill ta oss från punkten **v** till punkten **w** så behöver vi gå i motsatt riktning, vilket innebär att $\mathbf{w} = \mathbf{v} - (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = 2\mathbf{v} - \mathbf{u}$.



Figur 19

Om vi fortsätter förbi **w** till korsningspunkten mellan vektorerna **x** och **y**, och sedan går snett nedåt parallellt med **v**, så kommer vi till vektorn **x** (Figur 20). Detta innebär att

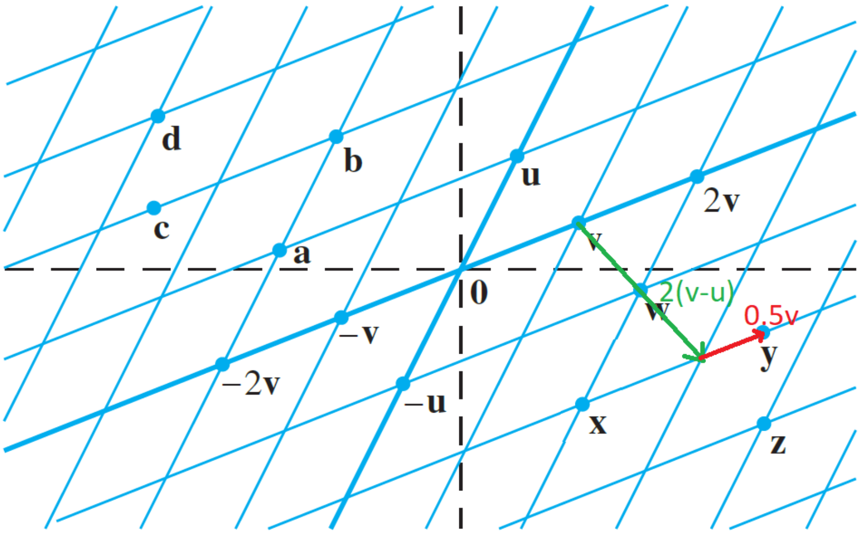
$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + 2(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + (-\mathbf{v}) = 2(\mathbf{v} - \mathbf{u})$$



Figur 20

På samma sätt når vi vektorn **y** (Figur 21):

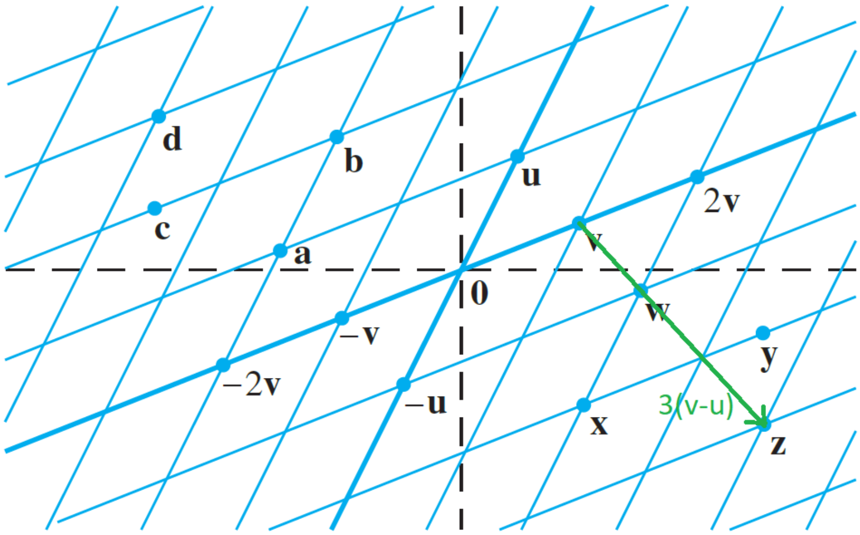
$$\mathbf{y} = \mathbf{v} + 2(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \frac{1}{2}\mathbf{v} = \frac{7}{2}\mathbf{v} - 2\mathbf{u}.$$



Figur 21

Den sista vektorn $\mathbf{z}$ är ännu enklare att nå (Figur 22):

$$\mathbf{z} = \mathbf{v} + 3(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = 4\mathbf{v} - 3\mathbf{u}.$$



Figur 22

Sammanfattningsvis har vi relationerna

$$\begin{cases} \mathbf{w} = 2\mathbf{v} - \mathbf{u} \\ \mathbf{x} = 2\mathbf{v} - 2\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \frac{7}{2}\mathbf{v} - 2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = 4\mathbf{v} - 3\mathbf{u} \end{cases}.$$

Den sista frågan är huruvida varje vektor i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Svaret på denna fråga är **Ja**, eftersom de två vektorerna är *linjärt oberoende*. Vi kommer snart lära oss mer om detta begrepp.

Problem 1.3.12

Betrakta vektorerna

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Avgör huruvida $\mathbf{b}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$.

Lösning: Det finns flera sätt att lösa denna uppgift, man kan exempelvis ställa upp problemet som ett linjärt ekvationssystem: Vi vill finna konstanter x_1, x_2, x_3 sådana att

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 = -5 \\ -2x_1 + 5x_2 = 11 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = -7 \end{cases}$$

och vi kan lösa detta ekvationssystem genom att radreducera motsvarande matris:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & 0 & 11 \\ 2 & 5 & 8 & -7 \end{bmatrix} && \Big[\text{Addera } 2 * \text{första raden till andra raden}\Big] \\ \sim &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & -7 \end{bmatrix} && \Big[\text{Subtrahera } 2 * \text{första raden från tredje raden}\Big] \\ \sim &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De två nedersta raderna säger oss att $5x_2 + 4x_3 = 1$ och $5x_2 + 4x_3 = 3$. Eftersom dessa två ekvationer inte kan vara uppfyllda samtidigt, drar vi slutsatsen att $\mathbf{b}$ inte kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$.

Problem 1.3.18*

Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

För vilka värden på h ligger vektorn $\mathbf{y}$ i planet som genereras av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$?

Lösning: Vektorn $\mathbf{y}$ ligger i planet genererat av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ om och endast om vektorn $\mathbf{y}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Låt oss attackera problemet precis som vi gjorde i förra uppgiften, genom att radreducera följande matris:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{bmatrix} && \Big[\text{Addera } 2 * \text{ första raden till den tredje raden}\Big] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 2h-3 \end{bmatrix} && \Big[\text{Subtrahera } 2 * \text{ andra raden från den tredje raden}\Big] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2h+7 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Denna matris motsvarar ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = h \\ \qquad x_2 = -5 \\ \qquad 0 = 2h+7 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = h + 3x_2 \\ x_2 = -5 \\ h = -\dfrac{7}{2} \end{cases}.$$

Vektorn $\mathbf{y}$ ligger alltså i planet genererat av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ om $h = -\frac{7}{2}$, och i så fall är

$$\mathbf{y} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = -\frac{37}{2}\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2.$$

Problem 1.4.18

Låt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Spänner kolonnerna hos B rummet $\mathbb{R}^4$? Har ekvationen $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$ en lösning för varje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$?

Lösning: De två frågorna är ekvivalenta, om svaret på den ena frågan är Ja så är svaret på den andra frågan Ja och vice versa. Indeed, om kolonnerna $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_4$ hos matrisen B spänner rummet $\mathbb{R}^4$ så kan varje vektor $\mathbf{y}$ skrivas som en linjärkombination

$$\mathbf{y} = x_1\mathbf{B}_1 + x_2\mathbf{B}_2 + x_3\mathbf{B}_3 + x_4\mathbf{B}_4 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 5x_4 \\ 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 1x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B\mathbf{x},$$

vilket innebär att varje vektor $\mathbf{y}$ kan skrivas på formen $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$. Ett liknande argument visar implikationen i andra riktningen, dvs. att om varje vektor $\mathbf{y}$ kan skrivas på formen $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ så spänner kolonnerna hos matrisen B rummet $\mathbb{R}^4$.

Det räcker alltså att besvara den andra frågan: huruvida varje vektor $\mathbf{y}$ kan skrivas som en lösning på ekvationen $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$. Detta är ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 5x_4 \\ 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 1x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = A \\ x_2 + x_3 - 5x_4 = B \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = C \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 = D \end{cases},$$

där vi har satt

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

för att betona att elementen i vektorn $\mathbf{y}$ antas vara *kända*. Idén är alltså att vi först fixerar en valfri vektor $\mathbf{y}$ och sedan försöker hitta en vektor $\mathbf{x}$ sådan att $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$, och frågan är huruvida det går att hitta en sådan vektor $\mathbf{x}$ oavsett vilken vektor $\mathbf{y}$ vi har valt. Ovanstående ekvationssystem kan i vanlig ordning lösas genom att radreducera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & A \\ 0 & 1 & 1 & -5 & B \\ 1 & 2 & -3 & 7 & C \\ -2 & -8 & 2 & -1 & D \end{bmatrix} \qquad \Big[\text{Subtrahera första raden från den tredje raden}\Big]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & A \\ 0 & 1 & 1 & -5 & B \\ 0 & -1 & -1 & 5 & C-A \\ -2 & -8 & 2 & -1 & D \end{bmatrix} \qquad \Big[\text{Addera andra raden till tredje raden}\Big]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & A \\ 0 & 1 & 1 & -5 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C-A+B \\ -2 & -8 & 2 & -1 & D \end{bmatrix}$$

Den tredje raden säger att om vektorn

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

ska kunna skrivas på formen $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ så måste den uppfylla ekvationen $C - A + B = 0$. Det finns oändligt många vektorer som inte uppfyller denna ekvation, exempelvis vektorn

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så svaret är att inte alla vektorer kan skrivas på formen $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$.

Anmärkning: Vi hade inte behövt ha med vektorn $\mathbf{y}$ längst till höger i matrisen som vi radreducerade, det hade räckt att radreducera den ursprungliga matrisen B. Om man kan reducera en kvadratisk matris B till reducerad trappmatrisform med enbart ettor i diagonalen,

$$\begin{bmatrix} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

så är svaret på frågan **Ja**, varje vektor $\mathbf{y}$ kan skrivas på formen $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$. Om den radreducerade matrisen däremot har en rad som bara innehåller nollor så är svaret på frågan **Nej**.

Problem 1.4.26*

Låt

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man kan visa att $3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Använd detta faktum (och inga radoperationer) för att hitta konstanter x_1 och x_2 som uppfyller ekvationen

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Lösning: Vi börjar med att utföra matrismultiplikationen i ovanstående ekvation:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \end{bmatrix},$$

och vi väljer nu att skriva om denna vektor som en linjärkombination:

$$\begin{bmatrix} 7x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}.$$

Den ursprungliga ekvationen (9) kan nu formuleras som

$$x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} = \mathbf{w},$$

vilket leder oss direkt till svaret: $x_1 = 3$ och $x_2 = -5$, eftersom vi vet att $3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Problem 1.5.6

Skriv lösningsmängden för det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

på parametrisk vektorform.

Lösning: Målet är att skriva lösningen på formen $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}x$ där x är en fri variabel. Ekvationssystemet kan representeras genom följande matris och som vanligt löser vi ekvationssystemet genom radreducering:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} && \Big[\text{Subtrahera första raden från den andra raden}\Big] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} && \Big[\text{Addera } 3 * \text{ första raden till den tredje raden}\Big] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} && \Big[\text{Subtrahera } 2 * \text{ andra raden från den tredje raden}\Big] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} && \Big[\text{Subtrahera } 3 * \text{ andra raden från den första raden}\Big] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ekvationssystemet lyder nu

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = 3x_3 \\ x_3 \text{ fri variabel} \end{cases}$$

vilket innebär att lösningen har formen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 3x_3 \\ 1x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_3.$$

Lösningens parametriska vektorform är alltså

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x.$$

Problem 1.6.6

När lösningar av natriumsulfat och bariumnitrat blandas, formas bariumfosfat och natriumnitrat. Den obalanserade ekvationen är

$$\mathrm{Na_3PO_4} + \mathrm{Ba(NO_3)_2} \to \mathrm{Ba_3(PO_4)_2} + \mathrm{NaNO_3}$$

För var och ett av dessa fyra ämnen, konstruera en vektor som listar antalet natrium-, fosfor-, syre-, barium- och kväveatomer. Använd sedan dessa vektorer för att balansera ekvationen.

Lösning: Det första ämnet, natriumfosfat, innehåller

- 3 st natriumatomer,
- 1 st fosforatom,
- 4 st syreatomer,
- 0 st bariumatomer,
- 0 st kväveatomer,

och motsvarar därför vektorn

$$\mathrm{Na_3PO_4} : \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

På precis samma sätt får vi resterande vektorer:

$$\mathrm{Ba(NO_3)_2} : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{Ba_3(PO_4)_2} : \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{NaNO_3} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi vill ta reda på hur många molekyler av varje ämne som krävs för att balansera ekvationen och vi kan skriva detta problem på formen

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

där x_1 representerar antalet natriumsulfat-molekyler och så vidare. Om vi flyttar över alla vektorer till vänsterledet och sätter ihop dem till en enda stor vektor kan vi skriva om den balanserade ekvation på formen

$$\begin{bmatrix} 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 1x_4 \\ 1x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 0x_4 \\ 4x_1 + 6x_2 - 8x_3 - 3x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 - 3x_3 + 0x_4 \\ 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 1x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem som kan lösas genom att radreducera följande matris:

$$
\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -8 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Placera den andra raden överst och fjärde raden näst överst}\right]
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -8 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 3 * \text{ första raden från den tredje raden}\right]
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -8 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 4 * \text{ första raden från den fjärde raden}\right]
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 6 * \text{ andra raden från den fjärde raden}\right]
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 3 * \text{ tredje raden från den fjärde raden}\right]
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 2 * \text{ andra raden från den femte raden}\right]
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera tredje raden från den femte raden}\right]
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \\ 6x_3 - x_4 = 0 \end{cases}
$$

Om vi sätter $x_3 = 1$ så får vi $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ och $x_4 = 6$. Den balanserade ekvationen är alltså

$$
2\mathrm{Na_3PO_4} + 3\mathrm{Ba(NO_3)_2} \to \mathrm{Ba_3(PO_4)_2} + 6\mathrm{NaNO_3}
$$

Läsvecka 4, Övning 2

Problem 1.7.14

Finn det värde h som gör följande vektorer linjärt beroende:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}.$$

Lösning: Ett sätt att lösa denna uppgift är att omformulera den som ett linjärt ekvationssystem. De tre vektorerna är linjärt beroende om det existerar konstanter a_1, a_2, a_3, minst en av dem nollskild, sådana att

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

och detta problem visar sig vara ekvivalent med att hitta konstanter x_1, x_2 sådana att[5]

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix} \tag{11}$$

Denna ekvation motsvarar det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 1 \\ -x_1 + 7x_2 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 = h \end{cases}$$

och som vanligt kan vi lösa detta ekvationssystem genom radreducering:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 23 & h-3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 23 & h-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & h-26 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & h-26 \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet lyder nu

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 1 \\ 0 = h - 26 \end{cases}$$

och vi drar slutsatsen att en lösning existerar för $h = 26$. Indeed, man kontrollerar enkelt att

$$6 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

[5]Konstanten a_3 kan inte vara lika med 0 eftersom de två första vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt oberoende. Vi kan därför dividera hela ekvation (10) med $-a_3$ och flytta över vektorn $\mathbf{v}_3$ till högerledet. Om vi sedan definierar $x_1 = -a_1/a_3$ och $x_2 = -a_2/a_3$ så får vi ekvation (11).

Problem 1.7.40

Antag att A är en $m \times n$-matris med egenskapen att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har högst en lösning för varje vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Använd definitionen av linjärt oberoende för att förklara varför kolumnerna i matrisen A måste vara linjärt oberoende.

Lösning: Kalla kolonnvektorerna för $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$, det vill säga att

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Definitionen av matrismultiplikation ger då att

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} x_n = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Vi har antagit att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har högt en lösning för varje vektor $\mathbf{b}$, så detta antagande gäller i synnerhet nollvektorn $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Med andra ord har ekvationen

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{12}$$

högst en lösning och vi vet redan att en sådan lösning är $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Det finns alltså inte någon annan lösning på ekvation (12), det finns inga andra värden på skalärerna $x_1, \ldots, x_n$ som uppfyller ekvation (12), och per definition innebär detta att kolonnvektorerna $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ är linjärt oberoende.

Problem 1.8.2*

Låt

$$A = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Definiera funktionen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Hitta $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$.

Lösning: Uppgiften blir ganska enkel om man skriver ut matriserna och vektorerna explicit:

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 * 1 + 0 * 0 + 0 * (-4) \\ 0 * 1 + .5 * 0 + 0 * (-4) \\ 0 * 1 + 0 * 0 + .5 * (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = .5\mathbf{u}.$$

Vi behövde alltså bara utföra matrismultiplikationen. På samma sätt får vi

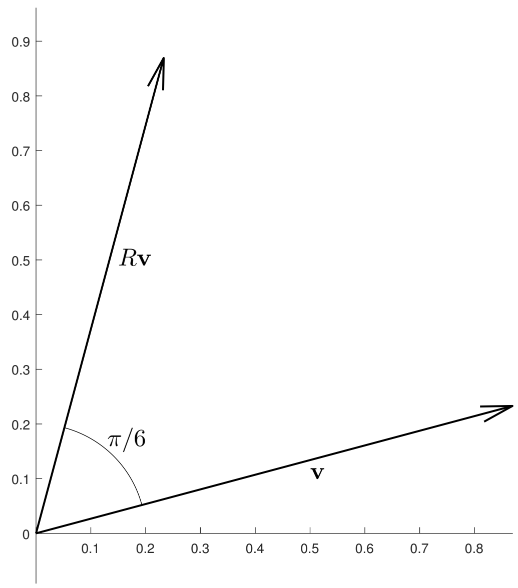
$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 * a + 0 * b + 0 * c \\ 0 * a + .5 * b + 0 * c \\ 0 * a + 0 * b + .5 * c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5a \\ .5b \\ .5c \end{bmatrix} = .5\mathbf{v}.$$

Vi är nu klara och du kan gå vidare till nästa uppgift, om du inte är nyfiken på lite...

Kuriosa: Tidigare har vi ofta tolkat matriser i termer av linjära ekvationssystem men denna uppgift visar en annan användning: matriser kan användas för att representera så kallade *linjära transformationer*, funktioner $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ som transformerar vektorer på ett linjärt vis. Om man exempelvis vill definiera en funktion $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som roterar en godtycklig vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ vinkeln $\pi/6$ radianer moturs, så räcker det att multiplicera vektorn med rotationsmatrisen

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är $T(\mathbf{v}) = R\mathbf{v}$. Linjära transformationer används överallt inom så gott som alla matematikområden, så faktumet att matriser och linjära transformationer är två sidor av samma mynt gör matriser *väldigt* användbara.



Man kan till exempel modellera kvantdatorer genom att låta ettor och nollor representeras av vektorer som vi kallar $|1\rangle$ resp. $|0\rangle$. Tillståndet hos en *qubit* representeras av en linjärkombination

$$|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\,,$$

där a, b är komplexa tal. Olika värden på a och b ger olika tillstånd $|\psi\rangle$ och vi får information om vår qubit genom att undersöka vilket tillstånd den befinner sig i. Kvantdatorn utför beräkningar genom att multiplicera tillståndet $|\psi\rangle$ med vissa typer av matriser U, vilket alltså transformerar ett input-tillstånd $|\psi\rangle$ till ett output-tillstånd $|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle$. Om vi antar att

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad a\,|0\rangle + b\,|1\rangle = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},$$

så kan en NOT-gate, som transformerar nollor till ettor och vice versa, skrivas som matrisen

$$U_{\text{NOT}} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}.$$

Indeed,

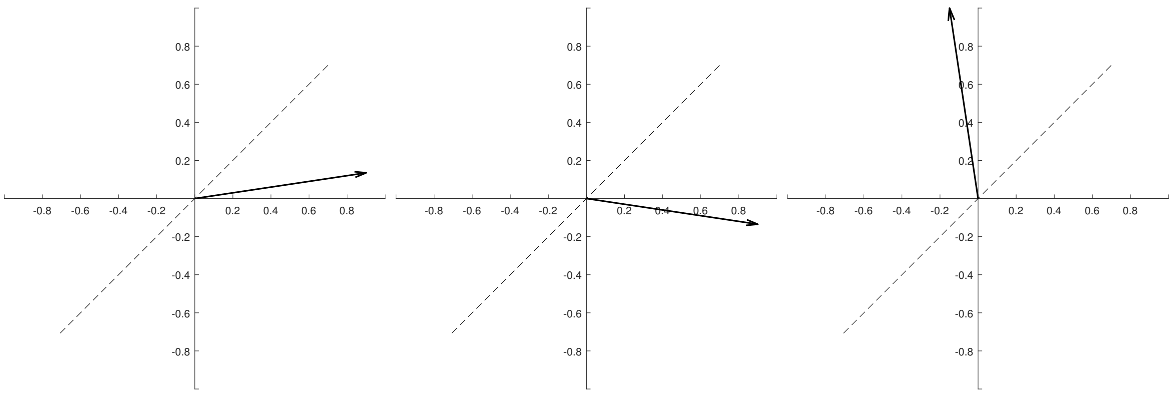
$$U_{\text{NOT}}\,|0\rangle = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = |1\rangle\,, \qquad \text{och} \qquad U_{\text{NOT}}\,|1\rangle = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = |0\rangle\,.$$

Märks det att jag tycker det här är riktigt coolt? Linjära transformationer är guld värda.

Problem 1.9.8

Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära transformationen som först spegelvänder vektorer kring den horisontella x_1-axeln och sedan spegelvänder vektorerna kring linjen $x_2 = x_1$. Finn standardmatrisen för T.

Jag visste inte riktigt hur jag skulle översätta uppgiften till svenska på ett tydligt sätt, så låt mig illustrera den linjära transformationen i Figur 23. Först speglas en godtycklig vektor kring x_1-axeln $((a) \to (b))$, sedan speglas vektorn kring den streckade linjen $x_2 = x_1$ $((b) \to (c))$.



(a) (b) (c)

Figur 23

Lösning: Låt oss kalla de två spegelvändningarna för A_1 och A_2. När vi spegelvänder en vektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

kring x_1-axeln så byter vi tecken på x_2-koordinaten utan att ändra värdet på x_1-koordinaten:

$$A_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Matrisen som utför denna transformation är

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

eftersom

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * x + 0 * y \\ 0 * x + (-1) * y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Hur gör man för att lista ut hur matrisen ska se ut? Detta är ett svårt problem, särskilt om matrisen är stor, så man får titta på många exempel och med tiden utveckla en känsla för hur matriser fungerar. Efter ett tag har man tillräckligt god koll på matrismultiplikation för att kunna backwardsengineera matrisen. Ett tips är att matriser på formen

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

multiplicerar x_1-koordinaten hos en vektor $\mathbf{v}$ med a och multiplicerar x_2-koordinaten med b:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a * x + 0 * y \\ 0 * x + b * y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix}.$$

Vi ville att matrisen A_1 skulle lämna x_1-koordinaten orörd och byta tecken på x_2-koordinaten, så vi kunde vi använda ovanstående matris med $a = 1$ och $b = -1$.

Låt oss nu titta på den andra transformationen, A_2. Vad som händer när vi spegelvänder en vektor kring linjen $x_2 = x_1$ är att vi byter plats på de två koordianterna:

$$A_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Se till exempel $(b) \to (c)$ i Figur 23. Denna transformation representeras av matrisen

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

eftersom

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 * x + 1 * y \\ 1 * x + 0 * y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Om vi vill spegelvända en vektor kring x_1-axeln och sedan spegla den resulterande vektorn kring linjen $x_2 = x_1$, så börjar vi med att multiplicera vektorn med A_1 och sedan multiplicerar vi den resulterande vektorn med A_2. Med andra ord beräknar vi $\mathbf{v} \mapsto A_1\mathbf{v} \mapsto A_2A_1\mathbf{v}$. Istället för att se detta som två separata transformationer så kan vi sätta $A = A_2A_1$ och se det som en enda transformation $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$, där

$$A = A_2A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 * 1 + 1 * 0 & 0 * 0 + 1 * (-1) \\ 1 * 1 + 0 * 0 & 1 * 0 + 0 * (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta är alltså standardmatrisen för transformationen T som utför de två speglingarna.

Kuriosa: Standardmatrisen ovan kan tolkas som

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix},$$

vilken är matrisen som roterar en vektor $\pi/2$ radianer moturs. Se $(a) \to (c)$ i Figur 23.

Problem 1.9.27

Avgör huruvida transformationen

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\qquad T(x_1,x_2,x_3)=(x_1-5x_2+4x_3,x_2-6x_3)=A\mathbf{x}$$

är injektiv (one-one) samt surjektiv (onto).

Lösning: När vi skriver $\mathbf{x}$ och $T(\mathbf{x})$ som kolonnvektorer så kan vi enkelt hitta standardmatrisen:

$$T(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}x_1-5x_2+4x_3\\ x_2-6x_3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}? & ? & ?\\ ? & ? & ?\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -5 & 4\\ 0 & 1 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=A\mathbf{x}.$$

Theorem 12 på sida 78 säger att den linjära transformationen T är

(a) injektiv om och endast om standardmatrisens kolonnvektorer $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ är linjärt oberoende.

(b) surjektiv om och endast om standardmatrisens kolonnvektorer spänner $\mathbb{R}^2$, det vill säga om och endast om varje vektor $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2$ kan skrivas som en linjärkombination

$$\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3. \tag{13}$$

Låt oss därför undersöka dessa frågor. Transformationen är alltså surjektiv om ekvationssystemet

$$\begin{cases}x_1-5x_2+4x_3=a\\ \qquad\;\; x_2-6x_3=b\end{cases}$$

har en lösning för varje vektor

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2,$$

och vi kan undersöka detta genom radreducering:

$$\begin{bmatrix}1 & -5 & 4 & a\\ 0 & 1 & -6 & b\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -26 & a-5b\\ 0 & 1 & -6 & b\end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet blir alltså

$$\begin{cases}x_1-26x_3=a-5b\\ x_2-6x_3=b\end{cases}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\begin{cases}x_1=26x_3+a-5b\\ x_2=6x_3+b\end{cases},$$

vilket har en lösning för varje värde på den fria variabeln x_3. Transformationen är surjektiv.

Transformationen är däremot inte injektiv, vilket ovanstående ekvationssystem avslöjar. Om vi låter $\mathbf{b}$ vara nollvektorn genom att sätta $a=b=0$, och om vi sedan sätter $x_3=1$, så får vi att

$$26\mathbf{a}_1+6\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3=26\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Ekvationen $x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$ implicerar alltså inte att $x_1=x_2=x_3=0$, så kolonnvektorerna är inte linjärt oberoende. Enligt Theorem 12(a) är transformationen T inte injektiv.

Sammanfattning: Transformationen är surjektiv men inte injektiv.

Läsvecka 5, Övning 1

Problem 2.1.6

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna matrisprodukten AB på två olika sätt: först genom att dela upp matrisen B i sina kolonnvektorer $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ och beräkna $A\mathbf{b}_1$ och $A\mathbf{b}_2$ var för sig, sedan via rad-kolumn formeln

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Lösning: Den första metoden ger kolonnvektorerna

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4*1 & + & (-2)*2 \\ (-3)*1 & + & 0*2 \\ 3*1 & + & 5*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 13 \end{bmatrix},$$

$$A\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4*3 & + & (-2)*(-1) \\ (-3)*3 & + & 0*(-1) \\ 3*3 & + & 5*(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix},$$

så matrisprodukten är

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ -3 & -9 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}.$$

Den andra metoden ger matriselementen

$$\begin{aligned}
(AB)_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 4*1 + (-2)*2 &&= 0, \\
(AB)_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 4*3 + (-2)*(-1) &&= 14, \\
(AB)_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = (-3)*1 + 0*2 &&= -3, \\
(AB)_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = (-3)*3 + 0*(-1) &&= -9, \\
(AB)_{31} &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} = 3*1 + 5*2 &&= 13, \\
(AB)_{32} &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} = 3*3 + 5*(-1) &&= 4,
\end{aligned}$$

så matrisprodukten är återigen

$$AB = \begin{bmatrix} (AB)_{11} & (AB)_{12} \\ (AB)_{21} & (AB)_{22} \\ (AB)_{31} & (AB)_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ -3 & -9 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}.$$

Personligen tycker jag att den första metoden är snabbast och enklast, men det är en smaksak. I vilket fall som helst är de två metoderna förstås mycket nära relaterade.

Problem 2.1.22

Visa att om kolonnerna i matrisen B är linjärt beroende, så är kolonnerna i matrisen AB också linjärt beroende.

Lösning: Eftersom kolonnvektorerna $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ till matrisen B är linjärt beroende så existerar skalärer $r_1, \dots, r_n$ sådana att minst en skalär $r_i \neq 0$ och

$$r_1\mathbf{b}_1 + \cdots + r_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}.$$

Matrisen AB har kolonnvektorerna $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_n$ och enligt Theorem 2 på sida 99 är matrismultiplikation en så kallad linjär operation, vilket innebär att vi kan göra följande omskrivningar:

$$r_1A\mathbf{b}_1 + \cdots + r_nA\mathbf{b}_n = A(r_1\mathbf{b}_1) + \cdots + A(r_n\mathbf{b}_n) = A(\underbrace{r_1\mathbf{b}_1 + \cdots + r_n\mathbf{b}_n}_{\mathbf{0}}) = \mathbf{0}.$$

Linjärkombinationen i vänsterledet är alltså lika med nollvektorn, så kolonnvektorerna till AB är linjärt beroende.

Problem 2.2.18

Antag att P är en inverterbar matris och att $A = PBP^{-1}$. Hitta ett uttryck för B i termer av A.

Lösning: Eftersom matrisen P är inverterbar gäller att $PP^{-1} = I$ och $P^{-1}P = I$. Vi kan därför bli av med faktorn P^{-1} i uttrycket PBP^{-1} genom att högermultiplicera med P:

$$A = PBP^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad AP = (PBP^{-1})P = PB(P^{-1}P) = PBI = PB.$$

På samma sätt blir vi av med faktorn P i uttrycket PB genom att vänstermultiplicera med P^{-1}:

$$AP = PB \quad \Longleftrightarrow \quad P^{-1}AP = P^{-1}(PB) = (P^{-1}P)B = IB = B.$$

Uttrycket vi söker är alltså

$$B = P^{-1}AP.$$

Problem 2.2.30

Om den existerar, finn inversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Använd algoritmen som introducerades i detta kapitel.

Lösning: Vi börjar med att kontrollera om matrisen är inverterbar. Ett sätt att kontrollera detta är att beräkna dess determinant, det finns nämligen en viktig sats som säger att en matris är inverterbar om och endast om dess determinant är nollskild. Vi får att

$$\det A = 5 * 7 - 10 * 4 = 35 - 40 = -5 \neq 0,$$

så vi drar slutsatsen att vår matris är inverterbar.

Låt oss nu använda den algoritm som presenteras på sida 110: Om en godtycklig matris A är inverterbar så kommer matrisen $[A, I]$ vara radekvivalent med matirisen $[I, A^{-1}]$, så allt vi behöver göra är att radreducera.

$$[A, I] = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/5 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1 & -4/5 & 1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/5 & 2 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1 \end{bmatrix} = [I, A^{-1}]$$

Inversen ges alltså av

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Indeed:

$$AA^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 * (-7) + 10 * 4 & 5 * 10 + 10 * (-5) \\ 4 * (-7) + 7 * 4 & 4 * 10 + 7 * (-5) \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A^{-1}A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} (-7) * 5 + 10 * 4 & (-7) * 10 + 10 * 7 \\ 4 * 5 + (-5) * 4 & 4 * 10 + (-5) * 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problem 2.3.6

Avgör huruvida matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

är inverterbar. Använd så få beräkningar som möjligt, men rättfärdiga ditt svar.

Lösning: The Invertible Matrix Theorem på sida 114 ger oss många olika metoder för att kontrollera huruvida matrisen är inverterbar. En sådan metod är att kontrollera om matrisen har en pivot-position för varje rad:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denna matris har alltså ingen pivot-position på sista raden, så matrisen kan inte vara inverterbar.

Läsvecka 5, Övning 2

Problem 2.8.10

Låt

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Avgör huruvida $\mathbf{u}$ ligger i Nul A.

Lösning: Vektorn $\mathbf{u}$ ligger i nollrummet till A om $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, så låt oss beräkna produkten.

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)*(-2) & + & (-2)*3 & + & 0*1 \\ 0*(-2) & + & 2*3 & + & (-6)*1 \\ 6*(-2) & + & 3*3 & + & 3*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Svaret är alltså **Ja**, vektorn $\mathbf{u}$ ligger i nollrummet till matrisen A.

2.8.26

Låt A vara följande matris tillsammans med dess reducerade trappstegsform:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 7 & 5 \\ -5 & 9 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finn en bas för Col A samt en bas för Nul A.

Lösning: Att finna en bas för kolonnrummet är en enkel uppgift, Theorem 13 på sida 152 säger nämligen att pivotkolonnerna formar en sådan bas:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

För att finna en bas till nollrummet behöver vi undersöka lösningarna till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Den reducerade matrisen ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 7x_3 + 6x_5 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -3x_3 - 2.5x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 1.5x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$

där x_3 och x_5 är fria parametrar (vi hade såklart kunnat välja två andra fria parametrar). Varje lösning till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kan därför skrivas som en linjärkombination

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2.5 \\ -1.5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vilket innebär att

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2.5 \\ -1.5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

utgör en bas för nollrummet.

Problem 2.8.32*

Om R är en 6×6-matris och Nul R *inte* är det triviala[6] delrummet, vad kan man säga om Col R?

Lösning: Om nollrummet inte är det triviala delrummet så måste det existera fler än en lösning på ekvationen $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$, vilket innebär att motsvarande ekvationssystem har minst en fri parameter. Detta betyder i sin tur att det finns kolonner som inte är pivotkolonner, och eftersom pivotkolonnerna utgör en bas för kolonnrummet så måste detta ha färre än 6 st basvektorer; vi säger att kolonnrummets *dimension*[7] är strikt mindre än 6.

Faktum är att dimensionen på nollrummet är lika med antalet fria parametrar och det finns exakt en fri parameter per kolonn som *inte* är en pivotkolonn. Vi får därför relationen

$$\dim \mathrm{Col}\ R + \dim \mathrm{Nul}\ R = \text{antalet pivotkolonner} + \text{antalet icke-pivotkolonner} = 6.$$

Detta är ett allmänt resultat kallat the *rank-nullity theorem* eftersom det relaterar dimensionen på kolonnrummet (the *rank*) till dimensionen på nollrummet (the *nullity*): Om R är en godtycklig $m \times n$-matris så är

$$\dim \mathrm{Col}\ R + \dim \mathrm{Nul}\ R = n.$$

[6]The zero subspace. Jag är osäker på den svenska termen.

[7]Begreppet *dimension* introduceras i kapitel 2.9 och definieras helt enkelt som antalet element i en bas, så dimensionen på kolonnrummet är lika med antalet pivotkolonner. OBS att man inte kan finna en annan bas med ett annat antal element, det är bevisat att samtliga baser till ett givet vektorrum har samma antal element, så dimensionen är en entydigt bestämd siffra. Till exempel är $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ eftersom de tre stycken vektorerna

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utgör en bas.

Problem 2.8.34*

Om P är en 5×5-matris och Nul P är det triviala delrummet, vad kan du säga om lösningarna på ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ för $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$?

Lösning: Om Nul P är det triviala delrummet så innehåller ekvationssystemet $P\mathbf{x} = \mathbf{0}$ inga fria parametrar, så varje kolonn i matrisen P är en pivotkolonn. För varje $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^5$ kommer vi därför få radreduceringen

$$[P, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} & b_1 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} & b_2 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & P_{35} & b_3 \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} & P_{45} & b_4 \\ P_{51} & P_{52} & P_{53} & P_{54} & P_{55} & b_5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{bmatrix}$$

för några siffror a, b, c, d, e som beror på vilken vektor $\mathbf{b}$ vi har valt. Ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har därför den unika lösningen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}.$$

Notera att det inte spelar någon roll att P är en 5×5-matris, det enda som krävs är att matrisen är kvadratisk (eftersom vi behöver exakt ett pivotelement per rad och kolonn). Vi kan alltså dra samma slutsats för alla kvadratiska matriser: Om P är en $n \times n$-matris och Nul P är det triviala delrummet så har ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en unik lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Ett annat sätt att komma fram till samma resultat är att tillämpa the invertible matrix theorem: om P är en $n \times n$-matris och Nul P är det triviala delrummet så har ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{0}$ inga fria parametrar; ekvationen har bara den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. The invertible matrix theorem säger därför att matrisen P är inverterbar, så för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ har ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ den unika lösningen $\mathbf{x} = P^{-1}\mathbf{b}$.

Ett tredje sätt att få information om lösningarna till $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är att använda faktumet att matrismultiplikation är en linjär operation: Antag att $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är två lösningar på samma ekvation $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Då är

$$P(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = P\mathbf{x}_1 - P\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Vektorn $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ är alltså en lösning på ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{0}$ men eftersom Nul P är det triviala delrummet så existerar bara en enda lösning på denna ekvation, nämligen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Det följer att $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Detta säger oss att *om* ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning så är den lösningen unik, det finns inte fler lösningar, men det säger inte om lösningen existerar från första början.

Problem 2.9.4

Låt

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vektorn $\mathbf{x}$ ligger i ett delrum H med bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Hitta koordinaterna för vektorn $\mathbf{x}$ i denna bas.

Lösning: Uppgiften säger alltså att vektorn $\mathbf{x}$ kan skrivas som en linjärkombination

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2,$$

och vi ombeds hitta värdena på skalärerna c_1 och c_2. Dessa skalärer kallas också för *koordinaterna* för vektorn $\mathbf{x}$ i basen $\mathcal{B}$. Ovanstående linjärkombination kan tolkas som ekvationen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix},$$

så vi kan lösa problemet genom radreducering:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 7 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Lösningen är alltså $c_1 = 7$ och $c_2 = 5$, vilket funkar finfint:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Problem 2.9.12

Låt A vara följande matris tillsammans med dess reducerade trappstegsform:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & -9 & -7 & 8 \\ 4 & 8 & -9 & -2 & 7 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finn en bas för Col A samt en bas för Nul A, och bestäm dimensionerna hos dessa två delrum.

Lösning: Kom ihåg att pivotkolonnerna ger en bas för kolonnrummet:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Kolonnrummet har alltså en bas innehållandes tre stycken basvektorer, så dess dimension är 3.

För att hitta en bas för nollrummet tittar vi på lösningarna till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Den reducerade matrisen ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \\ -5x_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 5x_4 \\ x_3 = 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

med de fria variablerna x_2 och x_4. Varje lösning till denna ekvation kan alltså skrivas som

$$\mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

så de två vektorerna

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

utgör en bas för nollrummet. Detta rum har således dimension 2.

Problem 2.9.20

Vad är rangen hos en 4×5-matris vars nollrum är tredimensionellt?

Lösning: Rangen hos en $m \times n$-matris A definieras som dimensionen på kolonnrummet,

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col}\, A,$$

så vi kan använda oss av the rank theorem[8] på sida 159:

$$\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Nul}\, A = n.$$

Vår matris har 5 kolonner och nollrummet har dimension 3, så

$$\operatorname{rank} A = n - \dim \operatorname{Nul}\, A = 5 - 3 = 2.$$

[8] Som vi beskrev i en tidigare uppgift kallas detta resultat även the rank-nullity theorem.

Problem 2.9.24*

Konstruera en 4×3-matris med rank 1.

Lösning: Rangen hos en matris är dimensionen på kolonnrummet och vi vet att pivotkolonnerna utgör en bas för detta rum, så uppgiften ber oss att konstruera en 4×3-matris med en enda pivotkolonn. Min filosofi är att den bästa lösningen är en enkel lösning, så vi behöver inte göra något mer avancerat än att ta följande matris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Läsvecka 6, Övning 1

Problem 3.1.20

Syftet med denna uppgift är att undersöka effekten som en radoperation har på determinanten. Beräkna determinanten för de två radekvivalenta matriserna

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Lösning: Determinanten av den första matrisen ges av formeln

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Determinanten av den andra matrisen ges enligt samma process: börja med att multiplicera de två diagonalelementen och subtrahera sedan produkten av de två andra elementen.

$$\det \begin{bmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{bmatrix} = (a+kc)d - c(b+kd) = (ad+kcd) - (cb+kcd) = ad - bc.$$

Radoperationen har alltså ingen påverkan på determinanten.

Problem 3.2.22

Använd determinanter för att avgöra huruvida matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

är inverterbar.

Lösning: Denna uppgift bygger på Theorem 4 på sida 173, som säger att en matris är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$. Detta är alltså ännu en del av the Invertible Matrix Theorem, och det är den här metoden som jag personligen använder för att undersöka huruvida en matris är inverterbar (men jag beräknar normalt inte determinanten för hand, det blir väldigt traggligt om matrisen är större än 3×3).

Via det här teoremet inser vi också att nästan alla matriser är inverterbara: om du konstruerar en matris helt på måfå och slänger in en massa random siffror på olika ställen i matrisen så är det väldigt osannolikt att siffrorna skulle balansera varandra på ett sådant sätt att determinanten blir exakt lika med 0. Det är osannolikt att en given matris har determinant 0 av ren slump. Om du arbetar med något problem inom exempelvis kemi och stöter på en matris som inte är inverterbar så lär detta alltså inte vara en slump, faktumet att matrisen inte är inverterbar lär säga dig någonting viktigt om problemet som du betraktar. Till exempel innebär det att lösningar på ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inte behöver vara unika eller ens existera.

Låt oss nu beräkna determinanten av ovanstående matris, och låt oss göra det på två olika sätt. Först använder vi följande metod:

$$\begin{aligned} \det A &= 5 \det \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= 5\Big((-3) * 3 - (-2) * 4\Big) - 1\Big(1 * 3 - (-2) * 0\Big) + (-1)\Big(1 * 4 - (-3) * 0\Big) = \\ &= 5 * (-1) - 1 * 3 - 1 * 4 = -12. \end{aligned}$$

där de tre termerna kommer från följande indelningar av matrisen A:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

En annan metod är att radreducera matrisen så att den står på trappstegsform. Determinanten kommer i så fall vara produkten av diagonalelementen $* (-1)^r$ där r är antalet gånger vi har bytt plats på två rader i matrisen, och till sist dividerar vi detta med eventuella skalningar som vi har gjort av raderna. Se Theorem 3 på sida 171. Vi får att

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 16 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

så $\det A = (-1)^2 * 1 * 4 * (-3) = -12$, precis som ovan. Matrisen är inverterbar ty $\det A \neq 0$.

Problem 3.3.6*

Använd Cramer's rule för att beräkna lösningen på följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

Lösning: Ovanstående ekvationssystem kan skrivas om på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Cramer's rule säger att om matrisen A är inverterbar och om $A_i(\mathbf{b})$ är matrisen där den i:te kolonnen är utbytt mot vektorn $\mathbf{b}$,

$$A_i(b) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix},$$

så kommer ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha den unika lösningen

$$x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vi börjar med att beräkna $\det A$ för att se om matrisen är inverterbar. Radreducering ger

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix},$$

så matrisen har determinanten $(-1)^1 * 1 * 1 * (-15) = 15$ och är därmed inverterbar.

Låt oss nu beräkna determinanterna för de tre matriserna $A_1(\mathbf{b})$, $A_2(\mathbf{b})$, $A_3(\mathbf{b})$.

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det A_1(\mathbf{b}) = 6,$$

$$A_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det A_2(\mathbf{b}) = 12,$$

$$A_3(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det A_3(\mathbf{b}) = 18.$$

Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har således lösningen

$$x_1 = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \qquad x_2 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \qquad x_3 = \frac{18}{15} = \frac{6}{5},$$

vilket är lätt att verifiera för hand.

Problem 3.3.28*

Låt S vara den parallellogram som bestäms av vektorerna

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{och sätt} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna hur arean hos parallellogrammen S förändras genom transformationen $T : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

Lösning: Theorem 10 på sida 184 säger att parallellogrammens area kommer förändras med en faktor som bestäms av determinanten hos matrisen A:

$$\text{area}(T(S)) = \det A * \text{area}(S) = (5 * 1 - 2 * 1)\text{area}(S) = 3 * \text{area}(S).$$

Arean kommer med andra ord att bli 3 gånger större.

Problem 5.1.6

Är vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en egenvektor till matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$? Hitta i så fall egenvärdet.

Lösning: Per definition är $\mathbf{x}$ en egenvektor till matrisen A om $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ för någon skalär λ, som vi i så fall kallar för egenvärdet till $\mathbf{x}$. Vi finner att

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\mathbf{x},$$

så $\mathbf{x}$ är en egenvektor till matrisen A med egenvärde $\lambda = -2$.

Problem 5.1.12

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 1, 5.$$

Hitta en egenbas för respektive egenrum.

Lösning: Tillsammans kommer egenvektorerna utgöra en bas för hela vektorrummet $\mathbb{R}^2$,

Låt oss leta efter en egenvektor med egenvärde $\lambda = 1$, dvs. vi måste lösa ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Skriver vi om denna ekvation som $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ så kan vi representera den på matrisform som

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}}_{A-I} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Denna ekvation svarar mot ekvationssystemet

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases},$$

vilket har en fri variabel x_1 och lösningen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är egenrummet för $\lambda = 1$ endimensionellt med basvekto $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$.

För att finna en egenvektor med egenvärde $\lambda = 5$ så löser vi ekvationen $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ på samma sätt som ovan, genom att först skriva om ekvationen som $(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}}_{A-5I} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denna ekvation svarar mot ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases}$$

vilket har en fri variabel x_1 och lösningen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är egenrummet för $\lambda = 5$ endimensionellt med basvektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$.

Problem 5.1.23*

Förklara varför en 2×2-matris kan ha högst två olika egenvärden. Förklara varför en $n \times n$-matris kan ha högst n olika egenvärden.

Lösning: Ett lösning på denna uppgift får man genom att titta på Theorem 2 på sida 272, som säger att om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ är egenvektorer som svarar mot distinkta egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ så är vektorerna linjärt oberoende. Vi kan alltså inte ha fler än n stycken distinkta egenvärden eftersom vi inte kan ha fler än n stycken linjärt oberoende vektorer i ett n-dimensionellt vektorrum.

Problem 5.2.14

Finn den karaktäristiska ekvationen för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Idén bakom det karaktäristiska polynomet är följande: Om λ är ett egenvärde till matrisen A så existerar minst en nollskild (egen)vektor $\mathbf{v}$ sådan att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Om vi skriver om denna ekvation som $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ så ser vi att matrisen $A - \lambda I$ har en icketrivial lösning på ekvationen $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så the invertible matrix theorem säger att matrisen $A - \lambda I$ inte är inverterbar. En annan del av the invertible matrix theorem säger därför att $\det(A - \lambda I) = 0$ och det är genom att lösa denna ekvation som vi finner egenvärdena λ.

Låt oss nu beräkna determinanten.

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 6 & 7 & -2-\lambda \end{bmatrix} &= \\
&= (5-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 7 & -2-\lambda \end{bmatrix} - (-2)\det\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -2-\lambda \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \\
&= (5-\lambda)\Big((1-\lambda)(-2-\lambda) + 0*7\Big) - (-2)\Big(0*(-2-\lambda) - 0*6\Big) + 3\Big(0*7 - (1-\lambda)*6\Big) = \\
&= -(5-\lambda)(1-\lambda)(2+\lambda) + 18(1-\lambda) = \\
&= (\lambda^2 - 3\lambda + 8)(1-\lambda) = \\
&= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 11\lambda + 8.
\end{aligned}$$

Det karaktäristiska *polynomet* är alltså $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 11\lambda + 8$. Den karaktäristiska *ekvationen* får man om man sätter polynomet till 0:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 11\lambda + 8 = 0.$$

Problem 5.2.18*

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man kan visa att den algebraiska multipliciteten hos ett egenvärde λ alltid är större än eller lika med dimensionen hos motsvarande egenrum. Finn det värde på h i ovanstående matris som gör egenrummet för $\lambda = 5$ tvådimensionellt.

Lösning: Vi finner egenvektorerna med egenvärde $\lambda = 5$ genom att lösa det ekvationssystem som svarar mot matrisekvationen $(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Radreducering ger

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & h-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

så ekvationssystemet har lösningen

$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 = 0 \\ (h-6)x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 \text{ fri variabel} \\ x_2 = 3x_3 \\ (h-6)x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Om $h = 6$ så blir x_3 en fri variabel och den allmänna lösningen på $(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kan skrivas

$$\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenrummet är tvådimensionellt, eftersom vi har två basvektorer.

Om $h \neq 6$ så ger ekvationen $(h-6)x_3 = 0$ att $x_3 = 0$. Detta ger i sin tur att $x_2 = 3x_3 = 0$. Den allmänna lösningen på ekvationen $(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kan därför skrivas som

$$\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenrummet är endimensionellt, eftersom vi bara har en basvektor.

Egenrummet för $\lambda = 5$ är alltså tvådimensionellt om och endast om $h = 6$.

Läsvecka 7, Övning 1

Problem 5.3.8

Om möjligt, diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Vi följer den metod som presenteras på sidorna 285-286 i kursboken.

Steg 1. *Beräkna matrisens egenvärden.*

Eftersom matrisen är på trappstegsform ligger egenvärdena på diagonalen, matrisen har alltså det enkla egenvärdet $\lambda = 5$. Indeed, det karaktäristiska polynomet

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)^2$$

har den enda lösningen $\lambda = 5$.

Steg 2. *Finn två linjärt oberoende egenvektorer till matrisen.*

Eftersom matrisen bara har ett egenvärde så måste varje egenvektor $\mathbf{v}$ uppfylla ekvationen

$$A\mathbf{v} = 5\mathbf{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A - 5I)\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

så vi kan finna egenvektorerna genom att radreducera matrisen $A - 5I$. Detta är en lätt uppgift eftersom denna matris bara har en etta uppe i högra hörnet, alla andra matriselement är lika med noll, så matrisen är redan radreducerad och svarar mot ekvationssystemet $v_2 = 0$. Varje egenvektor kan alltså skrivas på formen

$$\mathbf{v} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vilket innebär att egenrummet är endimensionellt. Vi kan alltså inte hitta två stycken linjärt oberoende egenvektorer till matrisen A, så matrisen är inte diagonaliserbar.

Denna uppgift illustrerar ett allmänt resultat som säger att en $n \times n$-matris är diagonaliserbar om dess egenvektorer bildar en (egen)bas för $\mathbb{R}^n$, och detta är omöjligt att göra om något av egenrummen har för låg dimension; den algebraiska multipliciteten[9] måste vara lika med den geometriska multipliciteten[10] för varje egenvärde. I vårt fall har egenvärdet $\lambda = 5$ den algebraiska multipliciteten 2 men den geometriska multipliciteten 1, så matrisen är inte diagonaliserbar.

[9] Antalet gånger faktorn *egenvärde* $- \lambda$ förekommer i det karaktäristiska polynomet.
[10] Dimensionen på egenrummet.

Problem 5.3.16

Om möjligt, diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

givet egenvärdena $\lambda = 2, 1$.

Lösning: Eftersom uppgiften har givit oss egenvärdena så hoppar vi direkt till **Steg 2.** i den metod som beskrivs på sidorna 285-286 i kursboken.

Steg 2. *Finn tre linjärt oberoende egenvektorer till matrisen.*

Vi börjar med att hitta egenvektorerna för egenvärdet $\lambda = 1$ genom att radreducera

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta säger oss att ekvationen $(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ har den allmänna lösningen

$$\begin{cases} v_1 + 2v_3 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenrummet för $\lambda = 1$ är alltså endimensionellt med ovanstående vektor som bas.

På samma sätt finner vi egenvektorerna för egenvärdet $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta säger oss att ekvationen $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ har den allmänna lösningen

$$\left\{ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right. \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenrummet för $\lambda = 2$ är alltså tvådimensionellt med ovanstående vektorer som bas.

De tre linjärt oberoende egenvektorer som vi är ute efter är alltså

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Steg 3. *Konstruera matrisen $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$.*

Sagt och gjort:

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Steg 4. *Skapa den diagonala matrisen D från motsvarande egenvärden.*

Matrisen D är diagonalmatrisen vars i:te element är egenvärdet för $\mathbf{v}_i$:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

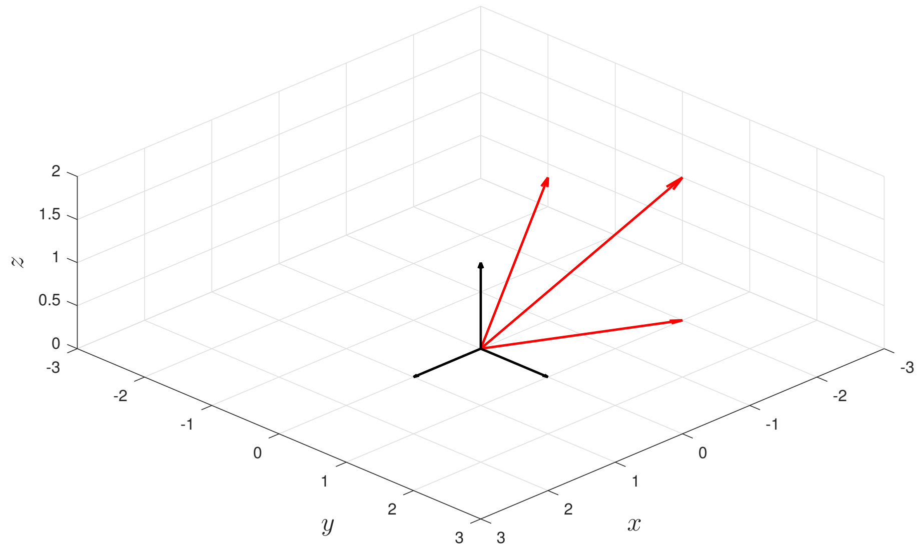
Vi är nu klara. Om vi har gjort rätt så ska matriserna uppfylla ekvationen $A = PDP^{-1}$ och vi kan kontrollera detta genom att undersöka huruvida $AP = PD$. Indeed,

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ PD &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Extramaterial: Vad innebär det egentligen att diagonalisera en matris? För att svara på denna fråga måste vi förstå innebörden hos ett *basbyte*, en förändring av koordinatsystemet i vektorrummet som vi arbetar i. Låt oss begränsa oss till tre dimensioner för att förenkla notationen. Normalt skriver vi en vektor på formen

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

där x, y, z är vektorns koordinater i det vanliga tredimensionella rummet, så till exempel pekar vektorn med koordinaterna $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ rakt uppåt. Följande figur visar standardbasen i svart och de tre egenvektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i rött:



Vad notationen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ egentligen betyder är att vektorn kan skrivas som en linjärkombination

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

där $\mathbf{e}_1$ är enhetsvektorn som pekar i x-led, och så vidare. Vektorns *koordinater* (x, y, z) är helt enkelt de skalärer som vi behöver placera framför våra basvektorer för att få vektorn $\mathbf{v}$.

Faktumet att de tre egenvektorerna utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ innebär att varje vektor $\mathbf{v}$ kan skrivas som en linjärkombination

$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 \tag{14}$$

vilket innebär att *vektorn* $\mathbf{v}$ *har koordinaterna* (a, b, c) *i denna egenbas*. Ovanstående linjärkombination kan sammanfattas mer koncist genom att skriva

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

om vi kommer ihåg vilka basvektorer vi använder. Samma vektor $\mathbf{v}$ kan alltså skrivas som en kolonnvektor på flera olika sätt beroende på vilken bas vi använder:

$$\textbf{Standardbasen:} \quad \mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$\textbf{Egenbasen:} \quad \mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Till exempel kan den första egenvektorn $\mathbf{v}_1$ skrivas på följande vis:

$$\textbf{Standardbasen:} \quad \mathbf{v}_1 = (-2)\mathbf{e}_1 + (-1)\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\textbf{Egenbasen:} \quad \mathbf{v}_1 = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

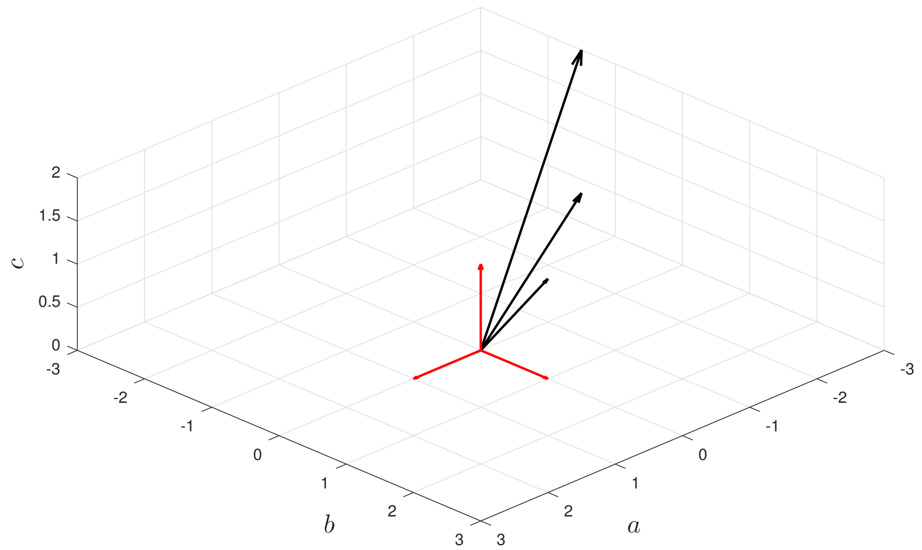
Att arbeta i egenbasen innebär att vi tänker på varje vektor som en linjärkombination (14) med koordinater (a, b, c), och vi kan då plotta varje vektor genom att placera a- och b-koordinaterna på de två horisontella axlarna och c-koordinaten på den vertikala axeln. Precis som på föregående bild är de tre egenvektorerna

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3, \\ \mathbf{v}_2 &= 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3, \\ \mathbf{v}_3 &= 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

plottade i rött, medan de tre standardbas-vektorerna

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 = (-1)\mathbf{v}_1 + (-0.5)\mathbf{v}_2 + 0.5\mathbf{v}_3, \\ \mathbf{e}_2 &= 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 = (-2)\mathbf{v}_1 + (-0.5)\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 = (-3)\mathbf{v}_1 + (-1.5)\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

är plottade i svart.



Att byta från standardbasen där vi representerar vektorer som kolonner

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

till egenbasen (eller någon annan bas) där vi representerar vektorer som kolonner

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

kallas att göra ett *basbyte*. När vi utför ett basbyte så är det inte bara våra kolonnvektorer som får nya koordinater, matriserna får också nya matriselement. Kom ihåg att varje $m \times n$-matris representerar en linjär transformation $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ enligt ekvationen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ och *matriselementen beror på vilken bas vi arbetar i, men den underliggande linjära transformationen är basoberoende.* Vad detta innebär är att de två matriserna

$$\textbf{Standardbasen:} \quad \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{Egenbasen:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

representerar samma linjära transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i två olika baser. Diagonalmatriser är väldigt lätta att arbeta med, så om man undersöker en linjär transformation T blir det ofta enklare om man byter till egenbasen där transformationen representeras av en diagonalmatris.

Problem 5.7.6

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \tag{15}$$

för

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{och} \qquad t \geq 0.$$

Notera att origo är en stationär punkt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Avgör huruvida den stationära punkten $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är attraktiv, repulsiv eller en sadelpunkt. Finn även den mest attraktiva/repulsiva riktningen.

Lösning: Idén är att skriva $\mathbf{x}(t)$ i egenbasen, det vill säga som en linjärkombination

$$\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{v}_1 + b(t)\mathbf{v}_2$$

av de två egenvektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, och undersöka vad ekvationen (15) sätter för krav på $a(t), b(t)$.

Genom att derivera ovanstående vektor $\mathbf{x}(t)$ får vi relationen

$$a'(t)\mathbf{v}_1 + b'(t)\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x} = a(t)A\mathbf{v}_1 + b(t)A\mathbf{v}_2 = \lambda_1 a(t)\mathbf{v}_1 + \lambda_2 b(t)\mathbf{v}_2,$$

där λ_1, λ_2 är de två egenvärdena. Från denna relation drar vi slutsatsen att[11]

$$a'(t) = \lambda_1 a(t) \qquad \text{och} \qquad b'(t) = \lambda_2 b(t).$$

Dessa är differentialekvationer med lösningarna

$$a(t) = a(0)e^{\lambda_1 t}, \qquad \text{respektive} \qquad b(t) = b(0)e^{\lambda_2 t},$$

så om vektorn $\mathbf{x}(t)$ uppfyller ekvationen $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ måste den vara på formen

$$\mathbf{x}(t) = a(0)e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + b(0)e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2.$$

Detta är den allmänna lösningen på ekvationen $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}$ för en allmän 2×2-matris, förutsatt att matrisen har två stycken linjärt oberoende egenvektorer som i så fall bildar en bas för $\mathbb{R}^2$.

I vårt fall har matrisen egenvärdena $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -2$ med egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

så lösningen på ekvationen $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ kan skrivas som

$$\mathbf{x}(t) = a(0)e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b(0)e^{-2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(0)e^{-t} + 2b(0)e^{-2t} \\ a(0)e^{-t} + 3b(0)e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

[11] Här har vi antagit att de två egenvektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ är linjärt oberoende, eftersom ekvationen

$$\big(a'(t) - \lambda_1 a(t)\big)\mathbf{v}_1 + \big(b'(t) - \lambda_2 b(t)\big)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

i så fall implicerar att båda koordinaterna är 0:

$$a'(t) - \lambda_1 a(t) = 0, \qquad \text{och} \qquad b'(t) - \lambda_2 b(t) = 0.$$

Om de två vektorerna är linjärt beroende så kan vi inte dra denna slutsats.

Begynnelsevärdena $a(0)$ och $b(0)$ hittar vi genom att jämföra med det kända värdet på $\mathbf{x}(0)$:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} a(0) + 2b(0) \\ a(0) + 3b(0) \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a(0) = 5 \\ b(0) = -1 \end{cases}.$$

Lösningen är alltså

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 5e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 5e^{-t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Fundera nu över vad som händer med denna vektor över lång tid. När tiden t är väldigt stor så är exponentialerna e^{-t} och e^{-2t} väldigt små, så vektorn kommer närmre och närmre nollvektorn ju längre tiden går. Detta innebär att nollvektorn är *attraktiv*, vilket alltid är sant när båda egenvärdena är negativa.

Om egenvärdena istället hade varit positiva så hade exponentialerna $e^{\lambda_1 t}$ och $e^{\lambda_2 t}$ blivit större och större med tiden och vi hade hamnat längre och längre från origo, vilket innebär att nollvektorn hade varit *repulsiv*. Situationen blir lite mer komplicerad om ett egenvärde är positivt och ett är negativt, i så fall säger vi att nollvektorn är en *sadelpunkt*. Men i vårt fall är nollvektorn som sagt attraktiv eftersom egenvärdena är negativa.

Olika vektorer $\mathbf{x}(t)$ färdas mot origo olika snabbt, beroende på vilken riktning de ligger i. Den mest attraktiva riktnigen är den riktning som svarar mot det mest negativa egenvärdet $\lambda_2 = -2$. Med andra ord kommer vektorerna på formen

$$\mathbf{x}(t) = b(0)e^{-2t}\mathbf{v}_2$$

att färdas snabbast mot origo.

Problem 5.7.12

Låt

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Konstruera den allmänna lösningen på ekvationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ inklusive komplexa egenvärden och finn sedan den allmänna reella lösningen. Beskriv hur en typisk bana ser ut.

Lösning: Vi fann den allmänna lösningen på ekvationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ i förra uppgiften,

$$\mathbf{x}(t) = a_0 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + b_0 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2,$$

och eftersom vi inte antog att egenvärdena λ_1, λ_2 är reella så gäller samma lösning även om vi har komplexa egenvärden. De två egenvärdena ges av den karaktäristiska ekvationen:

$$\det(A - \lambda I) = x^2 + 2x + 5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = -1 + 2i, \quad \lambda_2 = -1 - 2i,$$

och om vi radreducerar matriserna $A - \lambda_1 I$ respektive $A - \lambda_2 I$ finner vi motsvarande egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 - i \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 + i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Den allmänna lösningen på ekvationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ är alltså linjärkombinationen

$$\mathbf{x}(t) = a_0 \begin{bmatrix} 3 - i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-1+2i)t} + b_0 \begin{bmatrix} 3 + i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-1-2i)t}$$

och idén är att dela upp den allmänna lösningen i en reell och en komplex term:

$$\mathbf{x}(t) = \operatorname{Re}\big(\mathbf{x}(t)\big) + i \operatorname{Im}\big(\mathbf{x}(t)\big)$$

Vi finner den reella lösningen genom följande formel, där komplexkonjugatet $\overline{\mathbf{x}(t)}$ fås från $\mathbf{x}(t)$ genom att byta tecken på varje i.

$$\operatorname{Re}\big(\mathbf{x}(t)\big) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{x}(t) + \overline{\mathbf{x}(t)}\Big) = \frac{a_0 + b_0}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 - i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-1+2i)t} + \begin{bmatrix} 3 + i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-1-2i)t}\right).$$

Detta uttryck kanske inte ser ut att vara en reell vektor eftersom vi fortfarande har en massa i:n överallt, men om man matar in detta uttryck i Matlab och utvärderar den för olika värden på t så märker man att man bara får ut reella värden på vektorerna. Alla i:n tar ut varandra.

Det går att få bort alla i:n om man använder formeln

$$e^{\alpha + \beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \sin\beta)$$

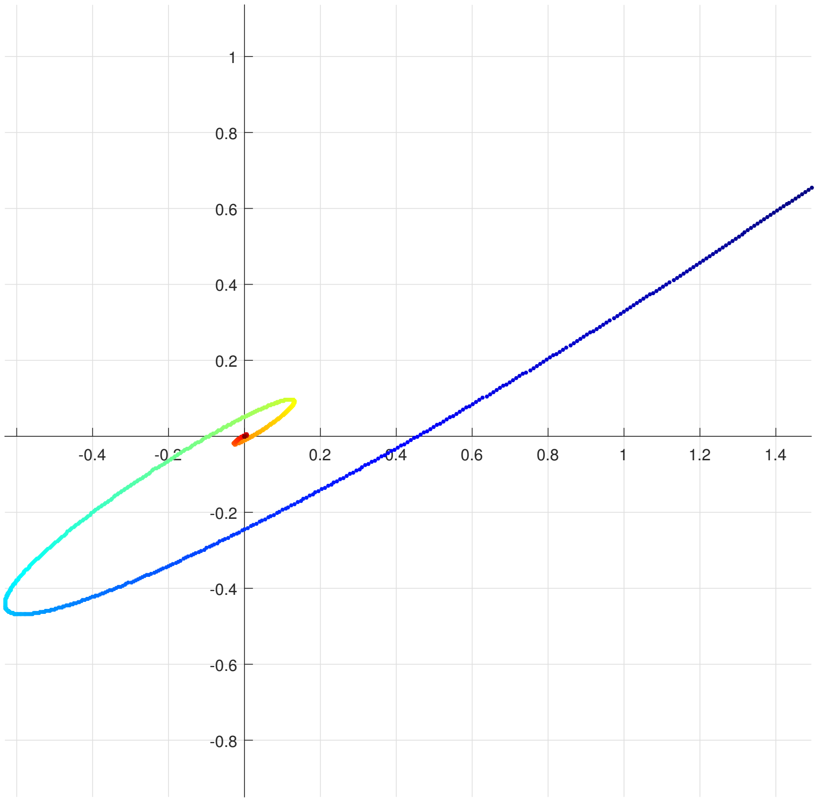
och delar upp de två vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i sina reella och komplexa komponenter:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 3 - i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-1+2i)t} + \begin{bmatrix} 3 + i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-1-2i)t} = \\
&= \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} i\right) e^{-t}\Big(\cos 2t + i \sin 2t\Big) + \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} i\right) e^{-t}\Big(\cos 2t - i \sin 2t\Big) = \\
&= 2\cos(2t) e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\sin(2t) e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Den reella lösningen kan nu skrivas som

$$\mathrm{Re}\left(\mathbf{x}(t)\right) = (a_0 + b_0)e^{-t}\begin{bmatrix} 3\cos(2t) + \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{bmatrix}.$$

En typisk bana går i en sorts spiral ned till den attraktiva punkten origo, vilket nedanstående figur visar. Man kan även se detta om man noterar att de trigonometriska funktionerna i lösningen håller sig runt relativt små värden medan exponentialen e^{-t} pressar $\mathrm{Re}\left(\mathbf{x}(t)\right)$ nedåt mot origo.



Läsvecka 7, Övning 2

Problem 6.2.10

Visa att de tre vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

utgör en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$, och skriv följande vektor i denna ortogonala bas:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösnng: För att se att de tre vektorerna utgör en ortogonal bas beräknar vi skalärprodukterna:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= 3 * 2 + (-3) * 2 + 0 * (-1) = 0, \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 &= 3 * 1 + (-3) * 1 + 0 * 4 = 0, \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 &= 2 * 1 + 2 * 1 + (-1) * 4 = 0. \end{aligned}$$

Alla tre skalärprodukter är lika med noll, så vektorerna är ortogonala mot varandra. Detta medför att vektorerna också är linjärt oberoende, för om c_1, c_2, c_3 är skalärer sådana att

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}, \tag{16}$$

så får vi för alla tre index $i = 1, 2, 3$ att

$$0 = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{0} = \mathbf{u}_i \cdot \Big(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3\Big) = c_1\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_3 = c_i\|\mathbf{u}_i\|^2.$$

Ingen av vektorerna $\mathbf{u}_i$ är nollvektorn, så vektornormen $\|\mathbf{u}_i\|$ är nollskild och vi drar slutsatsen att $c_i = 0$. Ekvation (16) kan alltså bara vara uppfylld om alla tre skalärer är lika med noll, så per definition är vektorerna linjärt oberoende.

De tre vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ utgör alltså en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$, så allt som återstår är att skriva vektorn $\mathbf{x}$ som en linjärkombination av dessa:

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{x}.$$

Värdena på skalärerna c_1 kan vi hitta med hjälp av en fiffig metod: För $i = 1, 2, 3$ har vi

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u}_i \cdot \Big(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3\Big) = c_i\|\mathbf{u}_i\|^2 \qquad \Rightarrow \qquad c_i = \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{u}_i\|^2}.$$

Om vi tillämpar denna formeln på våra vektorer så får vi skalärerna

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{u}_1\|^2} = \frac{3 * 5 + (-3) * (-3) + 0 * 1}{3^2 + (-3)^2 + 0^2} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}, \\ c_2 &= \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{u}_2\|^2} = \frac{2 * 5 + 2 * (-3) + (-1) * 1}{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \\ c_3 &= \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{u}_3\|^2} = \frac{1 * 5 + 1 * (-3) + 4 * 1}{1^2 + 1^2 + 4^2} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

och det är lätt att kontrollera att dessa siffror stämmer:

$$\frac{4}{3}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_3 = \mathbf{x}.$$

Problem 6.3.8

Låt W vara det delrum till $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Skriv vektorn

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

som en summa av en vektor i W och en vektor som är ortogonal mot W.

Lösning: Vi använder oss av *The Orthogonal Decomposition Theorem* på sida 350, som säger att om $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ är en ortogonal bas för W så kan vektorn $\mathbf{y}$ skrivas unikt som $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$, där

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 \in W$$

och $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ är ortogonal mot W.

De två vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ i uppgiften är redan ortogonala, så vi kan tillämpa teoremet omedelbart:

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{(-1) * 1 + 4 * 1 + 3 * 1}{1^2 + 1^2 + 1^2}\mathbf{u}_1 + \frac{(-1) * (-1) + 4 * 3 + 3 * (-2)}{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2}\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2.$$

Vektorns ortogonala dekomposition är alltså $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$ där

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Notera att de två komponenterna indeed är ortogonala:

$$\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{z} = \frac{3}{2} * \left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{7}{2} * \frac{1}{2} + 1 * 2 = -\frac{15}{4} + \frac{7}{4} + 2 = 0.$$

Problem 6.3.12

Finn den närmaste punkten till

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}$$

i det delrum W som spänns av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Lösning: *The Best Approximation Theorem* på sida 352 i kursboken säger att den närmsta punkten till $\mathbf{y}$ i delrummet W är den ortogonala projektionen $\hat{\mathbf{y}}$. Med andra ord,

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| < \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$$

för alla vektorer $\mathbf{v} \in W$ sådana att $\mathbf{v} \neq \hat{\mathbf{y}}$. Uppgiften ber oss således att beräkna den ortogonala projektionen $\hat{\mathbf{y}}$ och detta är en enkel uppgift: eftersom vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ utgör en ortogonal bas för delrummet W så kan vi använda formeln i *The Orthogonal Decomposition Theorem.*

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Vi är nu klara men för att verkligen illustrera att *The Best Approximation Theorem* fungerar så kan vi testa att jämföra $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|$ med $\|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$ för någon vektor $\mathbf{v} \in W$, exempelvis $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| = \| \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8,$$

$$\|\mathbf{y} - (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\| = \| \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 14 \end{bmatrix} \| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2 + 14^2} = \sqrt{208} > 8.$$

Här är alltså ett konkret exempel på att $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| < \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$ för varje $\mathbf{v} \neq \hat{\mathbf{y}}$ i delrummet W.

Practice Problem 1.5.3

Antag att $\mathbf{p}$ är en lösning på ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Låt $\mathbf{v}_h$ vara en godtycklig lösning på den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och låt $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$. Visa att $\mathbf{w}$ också är en lösning på $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Lös uppgiften med hjälp av Fredholms sats, det vill säga Theorem 6.1.3 på sida 337:

Freholms sats: Låt A vara en $m \times n$-matris. Det ortogonala komplementet till Row A är Nul A, och det ortogonala komplementet till Col A är Nul A^T. Alltså:

$$(\text{Row } A)^{\perp} = \text{Nul } A \qquad \text{och} \qquad (\text{Col } A)^{\perp} = \text{Nul } A^T.$$

Lösning: Teoremet säger oss att varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas på formen

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v}_h, \qquad \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}_h = 0,$$

där $\hat{\mathbf{x}} \in$ Row A och $\mathbf{v}_h \in$ Nul A, det vill säga $A\mathbf{v}_h = \mathbf{0}$.

Den allmänna lösningen på ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan således skrivas som en partikulärlösning $\hat{\mathbf{x}}$ plus någon lösning $\mathbf{v}_h$ på den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Kommentar: Den här uppgiften är väldigt enkel att lösa även *utan* Fredholms sats, eftersom man bara behöver använda linjariteten hos matrismultiplikation:

$$A\mathbf{w} = A(\mathbf{p} + \mathbf{v}_h) = A\mathbf{p} + A\mathbf{v}_h = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

Jag är osäker på hur jag ska lösa uppgiften med hjälp av Fredholms sats utan att nyttja faktumet att matrismultiplikation är linjärt, vilket skulle göra Fredholms sats överflödig. Så jag gör inte klart den här uppgiften. Istället avslutar jag med ett argument som visar varför nollrummet Nul A är ortogonalt mot radrummet Row A.

Kom ihåg att radrummet är det vektorrum som spänns upp av matrisens radvektorer $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$:

$$\text{Row } A = \text{span}\left\{\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m\right\} = \left\{c_1\mathbf{r}_1 + \cdots + c_m\mathbf{r}_m \mid c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\right\}.$$

Notera även att matrismultiplikation kan tolkas i termer av skalärprodukter:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix}.$$

Samtliga lösningar $\mathbf{x} \in$ Nul A på ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är därmed ortogonala mot samtliga rader:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} = 0 \\ \quad \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{x} = 0 \end{cases}.$$

Med andra ord är nollrummet ortogonalt mot radrummet: (Row $A)^{\perp}$ = Nul A.

Den andra halvan av Fredholms sats följer om man noterar att Col A = Row A^T och tillämpar den första halvan av satsen på matrisen A^T: (Col $A)^{\perp}$ = (Row $A^T)^{\perp}$ = Nul A^T.

Problem 6.4.12

Finn en ortogonal bas för kolonnrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Vi börjar med att radreducera matrisen för att hitta pivotkolonnerna, vilka utgör en bas för kolonnrummet. Om denna bas inte redan är ortogonal så kan vi använda basvektorerna för att konstruera en ortogonal bas via Gram-Schmidt. Radreducering ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alla tre kolonner är alltså pivotkolonner och kolonnrummet är således tredimensionellt, men kolonnerna är inte ortogonala mot varandra. Idén med Gram-Schmidt är följande:

Låt W_1 vara det endimensionella delrum som spänns av den första kolonnvektorn $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$. Den andra kolonnvektorn $\mathbf{v}_2$ kan skrivas som sin projektion på W_1 plus dess ortogonala komplement:

$$\mathbf{v}_2 = \hat{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{u}_2 \qquad \text{där} \qquad \hat{\mathbf{v}}_2 \in W_1 \text{ och } \hat{\mathbf{v}}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = 0.$$

Vi har nu två stycken ortogonala vektorer $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ och $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \hat{\mathbf{v}}_2$. Vi finner den tredje vektorn på samma sätt: Låt W_2 vara det tvådimensionella delrum som spänns av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ och dela upp den tredje kolonnvektorn $\mathbf{v}_3$ i sin projektion på W_2 och dess ortogonala komplement:

$$\mathbf{v}_3 = \hat{\mathbf{v}}_3 + \mathbf{u}_3 \qquad \text{där} \qquad \hat{\mathbf{v}}_3 \in W_2 \text{ och } \hat{\mathbf{v}}_3 \cdot \mathbf{u}_3 = 0.$$

De tre vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ bildar då en ortogonal bas för kolonnrummet.

Låt oss nu ta reda på hur vektorerna ser ut. Den första vektorn $\mathbf{u}_1$ är som sagt den första kolonnvektorn:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den andra vektorn får vi via projektionen på W_1:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \hat{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den tredje vektorn får vi via projektionen på W_2:

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \hat{\mathbf{v}}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{7}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

En ortogonal bas för kolonnrummet är alltså

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$