

Begrepp, Satser, Typiska problem för kursen MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning 2018

Begrepp och beteckningar	Satser och viktiga egenskaper och metoder	Typiska problem
Primitivfunktion-obestämd integral A 2.10, s, 150	Variabelsubstitution i primitivfunktion: direkt variabelsubstitution, s. 321 $u = w(x)$ för integraler $\int f(w(x))w'(x)dx$ och invers variabelsubstitution, s. 349 $x = g(u)$ för integraler $\int f(g^{-1}(x))dx$. Partiellintegration: $\int u dv = uv - \int v du$, s. 335 Partiell bråksuppdelning: enkelt fall, s. 343, allmänt fall, Sats 6.2.1, s. 347	Beräkna primitiva funktioner med hjälp av: 0) tabellintegraler i) enkel variabelsubstitution ii) partiell integration ii) invers variabelsubstitutioner $x = \sin(\alpha)$ och $x = \tan(\alpha/2)$ iii) partiellbråksuppdelning och tabellintegraler
Summabeteckning Σ , s. 292, Riemanns summa, s. 305, övre och undre Riemanns summor, s. 302. Bestämd integral och dess geometriska mening. Areal under en graf.	Bestämda integralens egenskaper. 5.4.1, s. 308 Medelvärdessatsen för bestämd integral 5.4.4, s. 310, (med bevis) Integralkalkylens huvudsats (Newton-Leibnitz sats) 5.5.5, s. 313, (med bevis)	Skriva en Riemanns summa för en enkel funktion. Beräkna en bestämd integral med hjälp av Integralkalkylens huvudsats (Newton-Leibnitz's sats).
Generaliserade integraler över obegränsade intervall och generaliserade (singulära) integraler av obegränsade funktioner., s. 364, 365. Konvergenta och divergenta (icke konvergenta) generaliserade integraler.	Variabelsubstitution i bestämd integral. Sats 5.6.6, s. 322 (med bevis) Partiell integration i bestämd integral. Exempel med konvergenta och icke konvergenta integraler, s. 367. Kriterier för konvergens och divergens av generaliserade integraler med hjälp av jämförelse med testintegraler. Sats 6.5.3, s. 368.	Beräkna en bestämd integral med hjälp av Integralkalkylens huvudsats och olika metoder för att beräkna primitiva funktioner. Ange om en singulär integral är divergent eller konvergent och beräkna den i andra fallet.
Figurer i planet begränsade av flera kurvor och axlar.	Formler för arean av figurer i planet begränsade av flera kurvor och axlar. §5.7, s. 327-330	Rita en figur i planet som är begränsad av flera kurvor och axlar. Beräkna arean av en figur i planet begränsad av en eller flera kurvor eller axlar
Begreppet volym av en rotationskropp: med hjälp av skivor och med hjälp av cylindriska skal (bilder i A. s. 395, 398.)	Formler för volym av rotationskropp med hjälp av skivor, s. 396 och med hjälp av cylindriska skal, s. 399.	Beräkna volymen av en rotationskropp begränsad av en eller flera kurvor roterade runt en axel.
Längden av en kurva given som graf av en funktion. A 7.3, s. 407	Formeln för längden av en kurva s. 407	Beräkna längden av en kurva definierad som graf till en funktion.
Areal av rotationsyta uppbyggd med rotation av en kurva runt en axel. A 7.3, s. 411	Formler för arean av en rotationsyta: s. 411.	Beräkna arean av en rotationsyta.
Ordinära differentialekvationer – ODE Ordningen av ODE, linjära ODE, s. 1001-1003. Begynnelsevärdesproblem för ODE och för system av ODE, s. 1009	Metoder för att lösa ODE med separabla variabler, s. 450. Metoder för att lösa en linjär ODE av första ordningen, s. 454: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$	Ange allmän lösning till en ODE av första ordningen som är linjär av första ordning, eller har separabla variabler. Lös begynnelsevärdesproblem för en ODE av första ordningen av samma typ som ovan.
	En lämplig formel för att lösa begynnelsevärdesproblem för linjära första ordningens ODE- är given i höger.	$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x p(s)ds\right) \left[y(x_0) + \int_{x_0}^x g(s) \exp\left(\int_{x_0}^s p(t)dt\right) ds \right]$
	Satsen 8.1.2, s. 1002, om allmänna lösningar till inhomogena linjära ODE. Recept för allmänna lösningar till homogena linjära ODE av andra ordningen med konstanta koefficienter: $ay''+by'+cy=0$, A 3.7, s. 206-207. Recept för allmän lösning till icke homogena ODE	Ange allmän lösning till homogen eller inhomogen linjär ODE av andra ordningen med konstanta koefficienter. Lös ett begynnelsevärdesproblem för en ODE av en av dessa typer.

Begrepp, Satser, Typiska problem för kursen MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning 2018

	<p>av samma typ, s. 1028. $ay''+by'+cy=g(x)$ Metoden för partikulära högerled: $g(x)=P(x)\exp(rx)$, $g(x)=P(x)\exp(rx)\cos(kx)$ $g(x)=Q(x)\exp(rx)\sin(kx)$</p>	
<p>Komplex tal, dess reella och imaginära delar, A-11. Konjugat till ett komplext tal, Absolut belopp av ett komplext tal. Komplex tal i polär form: absolut belopp och argument. Appendix I.</p>	<p>Beräkningsregler för komplexa tal, s. A-5 Multiplikation av komplexa tal i polär form, s. A6 Formeln för exponentiell funktion av ett komplext tal $z = a + ib$ på s. A-15: $\exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y))$ Kommentarer till algebrans huvudsats, s. A-18: varje polynom $P(z)$ av grad n har n komplexa rötter (räknade med multiplicitet): $P(z) = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$</p>	<p>Man måste kunna använda beräkningar med komplexa tal i olika sammanhang: beräkna komplexa rötter av andragradspolynom, komplexa egenvärden, kunna lösa ekvationer för komplexa egenvektorer för matriser 2x2, identifiera reella och imaginära delen av kvoten av två komplexa tal.</p>

Begrepp och beteckningar	Satser och viktiga egenskaper och metoder	Typiska problem och några lämpliga formler
<p>Begrepp från Lay 1.1, 1.2. Linjära ekvationssystem, koefficientmatris, utvidgad matris, Gausselimination, s.31 trappstegsform, s.29 reducerad trappstegsform s. 29 pivotelement, s.30, fri variabel, s.34</p>	<p>Metoden med Gauss elimination (row reduction algorithm): framåt fas s. 31, och bakåt substitution, s. 35. Resonemång för att bestämma ifrån utvidgad trappstegsmatris om ett ekvationssystem är lösbart, om det har en entydig lösning eller oändligt många lösningar där basvariabler är framställda med hjälp av fria variabler. s. 37</p>	<p>Gör Gauss elimination på en koefficient-matris, eller på utvidgad matris till ett linjärt ekvationssystem och får fram trappstegsmatris eller reducerad trappstegsmatris. Lös ett ekvationssystem, homogent eller inhomogent. Till exempel Exempel 4, s. 34-35.</p>
<p>Lay 1.3, 4.1 Vektorrum s. 208, vektorer i R^n, s. 43, Vektorekvation, s. 46 linjärkombination av vektorer $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ur R^n, s. 46 linjära höljet/spannet $Span\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$</p>	<p>Algebraiska egenskaper av R^n: beräkningsregler för vektorer, s. 43. $Span\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ är ett underrum i R^n Geometrisk mening med $Span\{v_1\}$ och $Span\{v_1, v_2\}$ för vektorer $v_1, v_2 \in R^3$, s. 46</p>	<p>Beräkna linjär kombination av en uppsättning vektorer. Bestäm om tre plan har en gemensam punkt, oändligt många gemensamma punkter. Kolla supplementary exercises in Kap. 1: 3, 6, 8, 17, s. 105-106</p>
<p>Lay 1.4 Matris – vektorprodukt Ax, s. 51 Matrisekvationen $Ax = b$, s. 52 Sats 1.4.3, s. 52 om ekivalensen mellan vektorekvation och matrisekvation</p>	<p>Rad-vektor multiplikationsregel för Ax, s. 54. Sats 1.4.4, s. 53 om några påstående ekvivalenta med lösbarheten av systemet $Ax = b$ (med bevis) Sats 1.4.5, s. 55 om linjäritet av matris - vektor produkt.</p>	<p>Beräkna matris-vektor produkt. Beräkna ett uttryck med flera matris produkter blandade med matris och vektor addition: t.ex. $(A + 2B)(3v - Cw)$ med matriser A, B, C och vektorer v, w.</p>
<p>Lay 1.7. Linjärt oberoende och linjärt beroende uppsättningar vektorer s. 73</p>	<p>Huvudsats om linjärt beroende vektorer: Sats 1.7.7, s. 75, s.77 om karakterisering av linjärt beroende uppsättningar vektorer Sats 1.7.8, s. 76. Om det är mera vektorer ur R^n i en uppsättning än antalet element n i varje vektor, så är de linjärt beroende.</p>	<p>Bestäm om en uppsättning vektorer är linjärt beroende eller oberoende med hjälp av Gauss elimination</p>
<p>Lay 1.8, 1.9. Linjära transformationer (avbildningar) s. 82 Standardmatrisen för en linjär avbildning, s. 88 Surjektiva (onto) transformationer (avbildningar), s. 92. Injektiva (one to one) transformationer (avbildningar), s. 92-93</p>	<p>Sats 1.9.10, s. 88 om standardmatris till en linjär transformation. (med bevis). Exempel 3, s. 89 om rotationstransformation Sats 1.9.11, om injektiva linjära transformationer. s. 94 Sats 1.9.12, om surjektiva och injektiva linjära transformationer. s. 94</p>	<p>Ange standardmatrisen till en linjär avbildning given av en formel eller med beskrivning av dess geometriska egenskaper. Bestäm formen av en triangel efter en linjär transformation. Bestäm om en linjär transformation är surjektiv eller injektiv, och om den är inverterbar.</p>

Begrepp, Satser, Typiska problem för kursen MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning 2018

<p>Lay 2.1. Matrisaddition och multiplikation med reella tal, s.110 Standardmatris till sammansatta linjära transformationer. s. 112-113 Matrisprodukt, s. 113 Enhetsmatris, s.115 Transponat av en matris, s.117</p>	<p>Sats 2.1.1, s.111. Egenskaper hos matris-addition och multiplikation med reella tal. Sats 2.1.2, s.115. Egenskaper hos matrismultiplikation. Del a) – associativa lagen för matrismultiplikation $A(BC) = (AB)C$ (med bevis) Sats 2.1.3, s. 117 egenskaper hos transponat matris</p>	<p>Förenkla ett uttryck med matris-multiplikation och addition: både för matriser och för allmänna matris uttryck. Formeln för ett godtyckligt element C_{ir} i matrisprodukten $C = AB$, för matriser $A (m \times p)$, $B (p \times n)$, $C (m \times n)$: $C_{ir} = \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kr}$, s.114</p>
<p>Lay 2.2. Inversen till en kvadratisk matris $AA^{-1} = I$, och $A^{-1}A = I$, s. 121 Standard bas $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ i R^n, s.166</p>	<p>Sats 2.2.6 a), b), c), s. 123 om räknelegler för inversa matriser. del b): $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ – (med bevis) Sats 2.2.7, s. 325. Matris A är inverterbar om och endast om A är radekvivalent med enhetsmatris. (med bevis) Sats 2.3.8, s. 130 om flera påstående ekvivalenta med att matrisen A är inverterbar. Sats 2.3.9, s. 132 om inverterbara linjära transformationer.</p>	<p>Bestäm om en matris är inverterbar. Beräkna inversen till en matris med Gauss elimination. Sats 2.2.4, s.121 med explicit formel för inversen av matris av storlek 2×2 : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ Bestäm om en linjär transformation är inverterbar.</p>
<p>Lay 2.8, 4.1. Underrum i ett linjärt rum s. 211, Underrum i R^n, s.164. Kolonnrums, s.165, nollrum s. 166. Bas för ett underrum s. 166. rank av en matris</p>	<p>Sats 2.8.13 om bas för kolonnrummet för en matris och dess pivotkolonner. s. 168</p>	<p>Bestäm bas av kolonnrummet för en matris Bestäm bas av nollrummet för en matris Bestäm bas för spannet $Span\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ av en uppsättning vektorer $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$.</p>
<p>L. 2.9. Koordinater med avseende på en bas. s. 172 Dimension av ett underrum, s. 173 Rank av en matris, s. 173</p>	<p>Rank sats_ 2.9.14, s. 174 Sats 2.9.15, s. 174 om p linjärt oberoende vektorer i ett underrum av dimension p.</p>	<p>Bestäm rank av en matris. Bestäm dimension av nollrummet av en matris i fall man kan rank av matrisen.</p>
<p>Determinant, s. 183 Kofaktor expansion, s. 184</p>	<p>Linearitetsegenskap för determinanter, s. 191 Egenskaper hos determinanter. Sats 3.2.3, s.187 om radoperationer på determinanter. Determinat av transponat: $\det A^T = \det A$; Determinant av produkt av två matriser $\det(AB) = \det A \det B$ Sats 3.2.4 Matris A är inverterbar om och endast om $\det(A)$ är icke noll.</p>	<p>Beräkna en determinant med hjälp av radoperationer eller med explicita formeln för mindre storlekar 2×2 och 3×3. Beräkna volym av en parallelepiped byggd på tre vektorer, eller arean av en parallelogram eller triangel byggd på två vektorer med hjälp av en determinant.</p>
<p>Beteckningen: $A_i(b) = [a_1, \dots, b, \dots, a_n]$, s. 195</p>	<p>Cramers regel: Sats 3.3.7, s. 195 för lösningen av ett system med inverterbar $n \times n$ matris: $Ax = b$ på formen: $x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}$ där $A_i(b) = [a_1, \dots, b, \dots, a_n]$</p>	<p>Lös ett ekvationssystem $Ax = b$ med inverterbar matris A med hjälp av Cramers regel, eller bestäm ett komponent i lösning med den. Exercise 3.3 - nummer 1,3, 5 i Lay</p>
<p>Egenvektorer, egenvärden, s. 285 Karakteristisk ekvation, s. 294</p>	<p>Egenvektorer i en triangulär matris är elementen som står på diagonalen av matrisen, s. 287 Egenvektorer som svarar mot distinkta egenvärden är linjärt oberoende. Sats 5.1.2, s. 288.</p>	<p>Bestäm egenvärden för en matris av storlek 2×2 eller 3×3. Bestäm egenvektorer för en matris av storlek 2×2 eller 3×3.</p>
<p>Diagonalisering av en matris, s. 300</p>	<p>Sats 5.3.5, s. 300 (med bevis). En $n \times n$ matris A är diagonaliserbar om och endast om den har n linjärt oberoende egenvektorer. Sats 5.3.6, s. 302: En $n \times n$ matris A med n olika egenvärden är diagonaliserbar.</p>	<p>Bestäm om en matris av storlek 2×2 eller 3×3 är diagonaliserbar (bara i fall man kan lätt beräkna egenvärden eller egenvärden är givna). För en given matris A hitta en inverterbar matris P och en diagonal matris D så: $P^{-1}AP = D$.</p>
<p>Riktningsfält, fasportrett till ett system ODE av första ordningen i planet. (kolla</p>	<p>Exempel 1,2,3 i kapitel 5.7 på sidor 330, 332, 334. om linjära system ODE med konstanta koefficienter i</p>	<p>Bestäm allmän lösning till ett homogent system linjära ODE av första ordningen med konstanta</p>

Begrepp, Satser, Typiska problem för kursen MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning 2018

<p>beskrivning av Laboration 6 och Exempel 1,2,3, i kap. 5.7 på sidor 330, 332, 334 Variabelbyte i linjära system ODE av första ordningen (Decoupling a dynamical system i kursboken s. 333)</p>	<p>planet. Metoden med variabelbyte i linjära system ODE av första ordningen i fall med distinkta egenvärden, s. 333.</p>	<p>koefficienter, alternativt lös ett begynnelsevärdesproblem för ett sådant system. Ex. 1, 2 i sec. 5.7 Bestäm vilken typ har origo för ett system linjära ODE i planet: attractor, repeller, sadelpunkt, spiralpunkt som i Exercises 5.7, 3–5 (reella egenvärden) och 9-13 (komplexa egenvärden), s. 336</p>
<p>Skalar produkt (inre produkt), s. 348 Längden av en vektor, s. 348. Ortogonal vektorer, s. 352. Ortogonal komplementet W^\perp till ett underrum W, i R^n, s. 352. Ortogonal uppsättning (mängd) vektorer, s. 356 Ortogonal bas, s. 352 Ortogonal projektion på en vektor u, s. 358 Ortogonal projektion $proj_W v$ av en vektor v på ett underrum W, s. 366 Ortonormal bas, s. 360, Ex. 3, s. 374</p>	<p>Fredholm satsen - Satsen 6.1.3, s. 353 om kolonrummet och nollrummet av en matris A och dess transponat A^T: $(Col A)^\perp = Nul A^T$ och $(Row A)^\perp = Nul A$ Mest användbara kriteriet för lösbarhet av linjära system $Ax=b$ följer härifrån. Nämligen: $Ax=b$ har en lösning om och endast om b är ortogonal mot $Nul(A^T)$. Sats 6.2.4, s. 356 (med bevis) Om att en ortogonal uppsättning vektorer bildar en bas för dess spann. Satsen 6.3.8, s. 666 om ortogonal dekomposition av R^n i ett underrum W och dess ortogonala komplementet W^\perp. Formeln (2), s. 366. i den satsen för projektion $proj_W v$ av en vektor v på ett underrum W. Satsen 6.3.9, s. 368 om att projektionen $proj_W v$ är den bästa approximationen i ett underrum W för en godtycklig vektor v ur R^n. Formeln för projektion med ortonormal bas: Satsen 6.3.9 s. 369.</p>	<p>Beräkna projektion av en vektor på spännet av en ortogonal uppsättning vektorer. Beräkna projektion av en vektor på ett underrum som är spännet av flera givna vektorer. Ange ortogonala komplementet till ett underrum som är spännet av givna vektorer. Beräkna avståndet mellan en punkt och ett underrum som är spännet av givna vektorer. Använd satsen 6.1.3 (Fredholms sats) för att bestämma om ett linjärt system $Ax = b$ är lösbart och för att beskriva alla högerled sommedför systemets lösbarhet. Kolla exempel med lösningar givna på hemsidan för övning 1 i vecka 7. Exercises 11, 13 i sektion 1.3, sid 48, och Exercise 15 i sektion 1.4, sid. 57, kan lösas med hjälp av Fredholms sats. Practice problem 3 i sektion 1.5, s. 56 är också ett bra exempel för att tillämpa Fredholm satsen.</p>
	<p>Gram – Schmidt metoden för att bygga en ortogonal bas: Example 2, s. 372, Satsen 6.4.11, s. 373.</p>	<p>Bestäm en ortogonal bas från en given bas och med hjälp av Gram Schmidt metoden.</p>
<p>Minstakvadratlösning, s. 378.</p>	<p>Satsen 6.5.13, s. 379 om minstakvadratlösning.</p>	<p>Bestäm minstakvadratlösning till ett system $Ax=b$ Anpassa en linje till en liten mängd experimentella data med minstakvadratmetoden. Sect. Sect. 6.6, Exercises 1-3, 9</p>
<p>Symmetriska matriser: $A = A^T$ ortogonala matriser: $P^T = P^{-1}$ Spektral dekomposition för en symmetrisk matris, s. 416. Projektionsmatris $U = u_i u_i^T$, s. 418</p>	<p>Egenvektorer till distinkta egenvärden för en symmetrisk matris är ortogonala. Sats 7.1.1, s. 413. Matris A är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om den är symmetrisk, Sats 7.1.2, s. 413. Spectral sats. Sats 7.1.3, s. 415. Symmetriska $n \times n$ matriser A har följande egenskaper: a. A har n reella egenvärden om man räknar multiplicitet. b. Dimension av ett egenrum är lika med multiplicitet av motsvarande egenvärde. c. Egenrum är ortogonala mot varandra. d. A är ortogonalt diagonaliserbar.</p>	<p>Ortogonalt diagonalisera en (liten) symmetrisk matris. 7.1, Exercises 13-19, 23. Ange spektral dekomposition av en (liten) symmetrisk matris. 7.1, Exercises 33,34. Formeln (2) s. 416 för spektral dekomposition av en symmetrisk matris med <u>ortonormala</u> egenvektorer: $A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T$</p>

Satser som kommer på tentan med bevis.

Adams:

- Sats 5.6.6, s. 320. Variabelsubstitution i bestämd integral:
direkt variabelsubstitution $u=w(x)$ för integraler: $\int_a^b f(w(x))w'(x)dx$.
- Sats 5.4.4, s. 308: Medelvärdessatsen för bestämd integral.
- Sats 5.5.5, s. 311: Integralkalkylens huvudsats (Newton-Leibnitz satsen).

Lay:

- Sats 1.4.4, s. 53: Några ekvivalenta påståenden om linjära ekvationssystem $Ax = b$.
- Sats 1.5.6, s. 63: Beskrivning av lösningarna till inhomogena linjära system.
- Sats 1.9.10, s. 88: Om standardmatris för linjära avbildningar.
- Sats 2.1.2 a), s. 115. Associativa lagen för matrisprodukt: $A(BC) = (AB)C$.
- Sats 2.2.6 b), s. 123. Om inversen till produkten AB av två inverterbara matriser A och B :
 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Sats 2.2.7, s. 125. Matrisen A , $n \times n$ är inverterbar om och endast om den är radekvivalent med enhetsmatrisen (identitetsmatrisen) av samma storlek.
- Sats 5.3.5, s. 300. Om ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att en matris är diagonaliserbar.
- Sats 6.2.4, s. 356. Om att en ortogonal uppsättning vektorer bildar en bas för dess spann.