1. **Rank, kolonnrum, nollrum. Lösbarhet av linjära system. Exempel 1.**

Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ och vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm dimensionen av kolonnrummet $Col(A)$ och dimensionen av nollrummet $Null(A)$ till A. **(2p)**

b) Bestäm om $\mathbf{b}$ hör till kolonnrummet $Col(A)$ till A. **(2p)**

c) Betrakta transponat A^T av A och ange en bas till dess nollrum $Null(A^T)$ och en bas till dess kolonnrum $Col(A^T)$ **(2p)**

d) Anänd basen till $Null(A^T)$ och Fredholm satsen för att bevisa att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart. **(2p)**

Lösning.

a) Dimension av kolonnrummet till en matris kallas för matrisens rank och är lika med antalet pivot element. Dimention av nollrummet är lika med antalet fria variabler och är lika med $n - rank$ där n är antalet kolonner. Det är lätt att se att kolonnerna i A är linjärt oberoende: de är två ickeparallella vektorer i $\mathbb{R}^4$. Rank är lika med 2. Nollummet $Null(A)$ består bara av en nollvektor och har dimension noll.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, Gaussian elimination ger trappstegsmatrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.Man ser att kolonnerna i A är linjärt oberoende.

b) Gausselimination på utvidgade matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$, ger $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ som visar att $\mathbf{b}$ hör till kolonnrummet $Col(A)$ till A.

c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \; A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Row echelon form till A^T fås med Gauss elimination: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

bas till nullspace $Null(A^T)$: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) Satsen om sambandet mellan ortogonala komplementet $(Col(A))^{\perp}$ till colonnrummet $Col(A)$och nullrummet till transponat matris $Null(A^T)$ säger att $(Col(A))^{\perp} = Null(A^T)$. Detta medför Fredholm satsen som säger att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning om och endast om $\mathbf{b}$ är ortogonal till $Null(A^T)$. Detta följer från att $\mathbf{b}$ är ortogonal till alla basvektorer i $Null(A^T)$: både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ i vårt fall. Vi testar detta:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \; ; \; \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$ Systemet är lösbart enligt Fredholms sats.

Rank, kolonnrum, nollrum. Lösbarhet av linjära system. Exempel 2

Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$, och vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) Bestäm om systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart. **(2p)**

b) Bestäm bas och dimension av kolonnrummet $Col(A)$. **(2p)**

c) Betrakta transponat A^T av A och ange en bas och dimension av dess nollrumm $Null(A^T)$. **(3p)**

d) Bestäm om vektorn b är ortogonal till $Null(A^T)$ och tillämpa Fredholm satsen för att förklara om systemet med högerledet b är lösbart. **(1p)**

Lösningsförslag:

a) Vi genomför Gausselimination på utvidgade matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och får et matris på trappstegsform som svarar ekvationssystemet där tredje ekvation ser ut som $0 = 2$ och kan inte lösas. Det betyder att systemet är olösbart.

b) Vi observerar från samma beräkning, att bara två första kolonner i matrisen A är pivot kolonner. Detta medför att två första kolonner i matrisen A utgör basen till kolonnrummet $Col(A)$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ Dimensionen av kolonnrummet $Col(A)$ är två - lika med antal vektorer i en bas.

c) Transponat till matrisen A är

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tillbaka substitution ger reducerad trappstegsform $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vi ser att homogena systemet met matrisen A^T har två fria variabler. Dimentionen av nollrummet $Null(A^T)$ är då lika med två. Vi får fram en bas till nollrummet med följande lämpliga val av fria variabler $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ och $x_3 = 0$ och $x_4 = 1$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

d) Beräknar skalärprodukten

$v_1 \cdot b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$ och ser att vektorn b är inte ortogonal till en vektor i $Null(A^T)$.

Då är den inte ortogonal till $Null(A^T)$ heller.

Vi kan med att tillämpa Fredhom satsen göra samma slutsats som i punkten a).