Arean och integral

Summor

Huvudämne i föreläsningen är areor av figurer i planet och integraler. Integral är ett begrepp som låter definiera areor av figurer i planet, och speciellt beräkna areor mellan grafer av funktioner och x - axeln..

Vi inför först en beteckning för långa summor av tal t.ex. a_k markerade med index $k = 0, 1, 2, ...n$:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Area

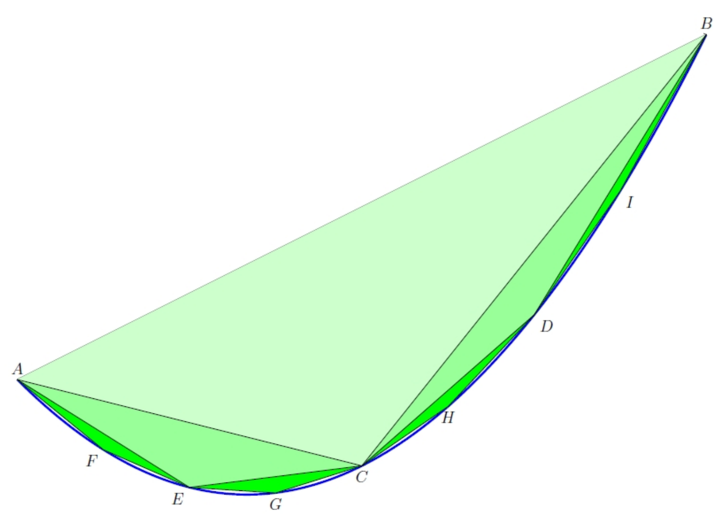
Arean av en rektangel $[a, b] \times [c, d]$ med hörnpunkter (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), om vi går medurs runt rektangeln, är produkt av bottens längd $(b - a)$ med höjden $(d - c)$:

$$Area([a, b] \times [c, d])) = (b - a)(d - c)$$

Exempel.Vi kommer att först betrakta ett exempel med arean av en mera komplicerad figur, nämligen arean mellan x - axeln och parabeln $y(x) = x^2$ för $x \in [0, b]$.

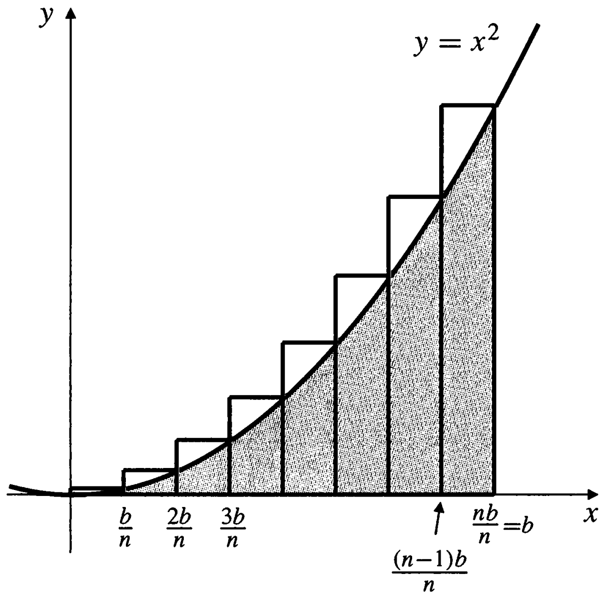
Den arean var beräknad först av Arkimedes i antika Grekland för cirka 2250 år sedan.

I sitt papper Parabolas Area löste han ett även lite mera komplicerat problem. Han visade att arean mellan parabeln $y(x) = x^2$ och en sekant linje är lika med 4/3 delar av en inskriven triangels area.



Hans idee var att approximera arean av den figuren med en summa av areor av små enklare figurer (trianglar i hans fall) och beräkna gränsvärdet av sådana summor när antalet dessa enklare figurer går mot oändligheten och täcker hela figuren. Han uttryckte den lösningen med hjälp av oändliga geometriska serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{3}$$



Vi kommer att approximera arean mellan x - axeln och parabeln $y(x) = x^2$ för $x \in [0, b]$ på annat sätt, med summan av n tunna rektanglar. Vi delar intervallet $[0, b]$ i n små delintervall med punkter $x_k = k\left(\frac{b}{n}\right)$, $k = 0, ..., n$.

Ovanför dessa intervall ritar vi smala rektanglar med bottens längder $\Delta_n = \frac{b}{n}$, och höjder $y(x_k) = \left(k\left(\frac{b}{n}\right)\right)^2$ som är värdena av funktionen $y(x)$ i punkterna x_k. Trappsteget av dessa rektanglar approximerar väl figuren under parabeln $y(x) = x^2$ för $x \in [0, b]$ om antalet rektanglar n är stort. Dess arean S_n är summan av areor $\Delta_n y(x_k)$ av byggda små rektanglar och approximerar väl arean under parablen

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \Delta_n y(x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b}{n}\right)\left(k\frac{b}{n}\right)^2 = \\ \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^{n} (k)^2 &= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Vi har använt här formeln $\sum_{k=1}^{n} (k)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ men avstår från att ge bevis till den (kolla beviset med teleskopiska summor på sid. 294 i Adams om du vill)

Vi ser att S_n har ett gränsvärde då n går mot oändligheten och detta gränsvärde är naturligt att betrakta som arean av figuren.

$$Arean(\cup) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{n}\right)^3 \frac{n(n+1(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{1(1+1/n)(2+1/n)}{1} = \frac{b^3}{3}$$

Vi kommer senare att få samma svar på annat mera avancerat sätt.■

Riemans summor och Riemanns integral

Ideen som vi använde i exemplet med arean under parablen kan faktiskt generaliseras till godtyckliga kontinuerliga funktioner.

Vi betraktar ett intervall $[a, b]$ indelat med punkter $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ i små delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ med längderna $\Delta(x_i) = x_i - x_{i-1}$. Ur vart och ett av delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ väljas någon punkt c_i. Vi betecknar den uppsättning av punkter med $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$.

Vi inför också "normen" av indelningen $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ med

$$\|P\| = \max_{1 \le i \le n} |\Delta(x_i)|$$

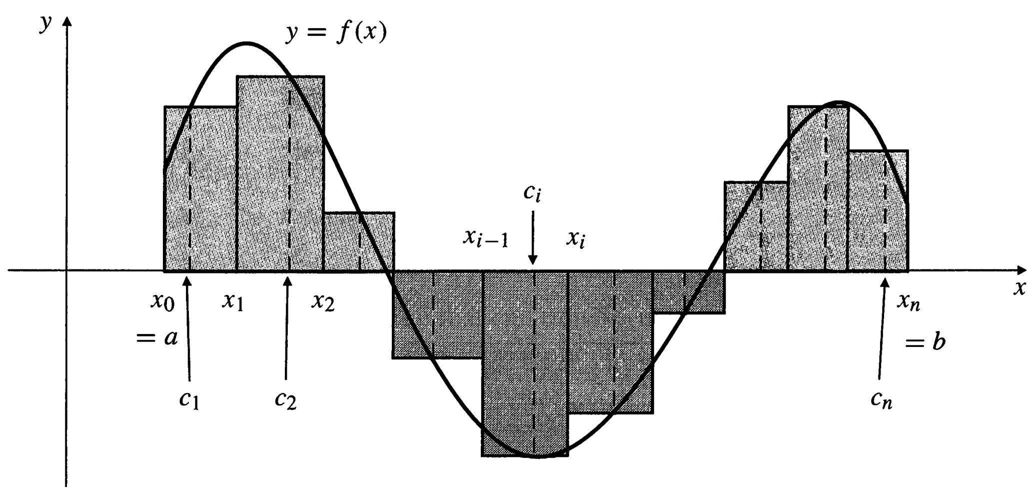
som maximala längden av alla interval $\Delta(x_i)$.

För en funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kallas följande summa en Riemanns summa till funktionen f och intervalindelningen P och punkterna C på delintervall:

$$R(f, P, C) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta(x_i) = f(c_1)\Delta(x_1) + f(c_2)\Delta(x_2) + ... + f(c_n)\Delta(x_n)$$

(efter Riemann - tyska matematiker från slutet av 18 hundratalet).

Vi lägger märke till att Riemanns summa består av tecknade areor av rektanglar mellan x - axeln och punkterna $f(c_i)$ på kurvan $y = f(x)$, med tecken som väljes enligt tecknet av funktionen f (c_i) punkten c_i.



Sats 2, sid. 306. Om konvergensen av Riemanns summor.

Om f är kontinuerlig på $[a, b]$, måste dess Riemanns summor ha ett gränsvärde då $n \to \infty$ och $\|P\| \to 0$.

Definition. Detta gränsvärde kallas integralen (eller bestämda integralen) av funktionen f över intervallet $[a, b]$ och betecknas med

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \|P\| \to 0}} R(f, P, C) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \|P\| \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta(x_i)$$

Funktionen f kallas i det fallet en **integrerbar funktion** (enligt Riemann). Beteckningen för bestämda integralen påminner formeln med summan $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta(x_i)$ där $\Delta(x_i)$ ersättes med dx och $f(c_i)$ ersättes med $f(x)$.Värdena a och b markerar gränser för variabeln x som funktionen f integreras över.■

Vi observerar att i exemplet med arean under parabeln uttrycktes arean faktiskt med hjälp av integral av funktionen $y(x) = x^2$ som beräknades med hjälp av den givna definitionen.

$$Arean(\cup) = \int_0^b x^2 dx \tag{1}$$

Det finns andra mera flexibla sätt att definiera integral som gäller även för icke kontinuerliga funktioner (Lebesque integral). I dessa konstuktioner skär man fuguren under grafen inte vertikalt, som i Riemanns definition för integral, men lateralt. Detta (efter ett relativt komplicerat analys av dessa laterala skärningar)) leder till ett integralbegrepp med mindre krav på funktionen f .

Bestämda integralens egenskaper

Sats 3, sid. 308.

a) Integral över ett integval med längden noll är like med noll

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

b) Bytet av integrationsordningen leder till ändring av integralens tecken.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

c) Integral är linjär funktione av sin integrand (funktionen under integraltecken).

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\, dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$$

d) Integral är addtiv funktion med avseende på integrationsintervall.

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

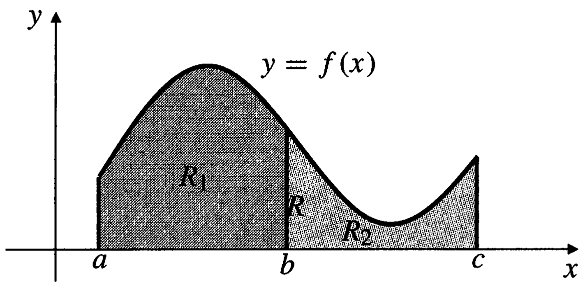
e) Om $a \le b$ och $f(x) \le g(x)$ för alla $x \in [a, b]$, så samma olikheten gäller för integraler av f och g:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

f) **Triangelolikheten för integraler**

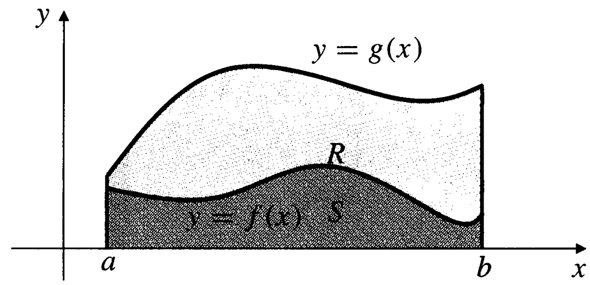
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Lite illustrationer av formulerade egenskaper följer här:



area R_1 + area R_2 = area R

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

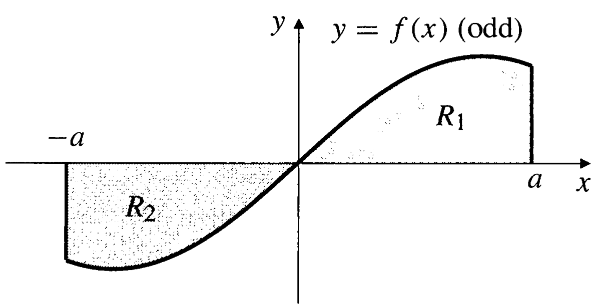


area $S \leq$ area R

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

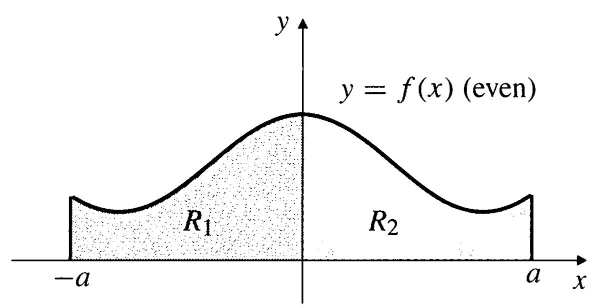
Vi kommer inte att betrakta bevis till dem. Alla bevis till dessa egenskaper följer från liknande egenskaper för finita summor och gränsövergången enligt integralens definition.

Enkla integralens egenskaper för udda funktioner och jämna funktioner och intervall symmetriska med avseende på noll punkten följer direkt från egenskaper c) och d) och illustreras här:



area R_1 − area $R_2 = 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



area R_1 + area R_2 = 2 area R_2

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Integralkalkylens huvudsats - Newton-Leibnitz satsen

I vissa enklare fall kan man beräkna integraler med hjälp av definition. Men den approachen är svår och saknar flexibilitet. Newton och Leibnitz gjorde i 16 hundratalet en nyckeluppfinnelse att bestämda integralen med varierande övre gräns

$$F(x) = \int_c^x f(s)ds \tag{2}$$

där c är en godtycklig punkt, är en deriverbar funktion och att dess derivata i punkten x är lika med $f(x)$ - värdet av funktionen under integralen i punkten x:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{3}$$

Definition. En funktion F som har den egenskap (att dess derivata är lika med en funktion f), kallas primitiv funktion till funktionen f.

Formeln (2) tillsammans med additionsregeln för integral över två intervall, leder till slutsatsen att

$$\int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a) \tag{4}$$

Dessa tre formler tillsammans är **Integralkalkylens huvudsats, eller Newton-Leibnitz satsen. (Theorem 5 , sid. 313 i Adams)** $\square$

Vi kommer att ge bevis till den satsen efter några exempel av dess användning. Praktiska värdet av **Newton-Leibnitz** satsen är uppenbart. Vi kan i flera fall bestämma en primitiv funktion F till funktionen f under integralen $\int_a^b f(s)ds$. Detta ger oss umedelbart integralens värde enligt formeln (4).

Exempel. Betrakta exemplet med arean under parabeln som vi löste tidigare med hjälp av integralens definition. Det är lätt att observera att $\frac{d}{dx}(\frac{x^3}{3}) = x^2$. Detta betyder att $G(x) = \frac{x^3}{3} + C$ är en primitiv funktion till x^2. Godtyckliga konstanten C får adderas för att dess derivata är alltid noll.

Vi kan då beräkna integralen i uttrycket för arean

$$Arean(\cup) = \int_0^b x^2 dx$$

igen men med hjälp av Newton-Leibnitz satsen, nämligen

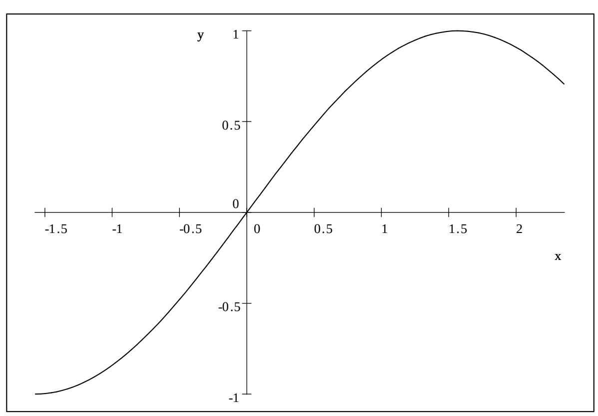
$$Arean(\cup) = \int_0^b x^2 dx = G(b) - G(0) = \left(\frac{b^3}{3} + C\right) - (0 + C) = \frac{b^3}{3}$$

$\blacksquare$

Exempel. Vi betraktar ett exempel med integral där funktionen under integralen ändrar tecken.

$3/4\pi = 2.356\,2$

$$I = \int_{-\pi/2}^{3/4\pi} \sin(x)dx$$



Vi observerar att integralen kan delas upp i summan av två integraler

$$I = I_1 + I_2 = \int_{-\pi/2}^{0} \sin(x)dx + \int_0^{3/4\pi} \sin(x)dx$$

över intervall $[-\pi/2, 0]$, $[0, 3/4\pi]$ där funktionen sin byter tecken från minus till plus. Observera att $\frac{d}{dx}(-\cos(x)) = \sin(x)$, d.v.s. $-\cos$ är en primitiv funktion till sin. Detta medför att

$$I = \int_{-\pi/2}^{3/4\pi} \sin(x)dx = (-\cos(3/4\pi)) - (-\cos(-\pi/2)) = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (-(0)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

där vi använde att $\cos(3/4\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

■

Bestämd integral av styckviskontinuerliga funktioner.

Definitionen av bestämd integral som var formulerad kan lätt generaliseras till situationen då en funktion är kontinuerlig på ett intervall förutom ett begränsat antal punkter där dess graf har ett begränsat språng.

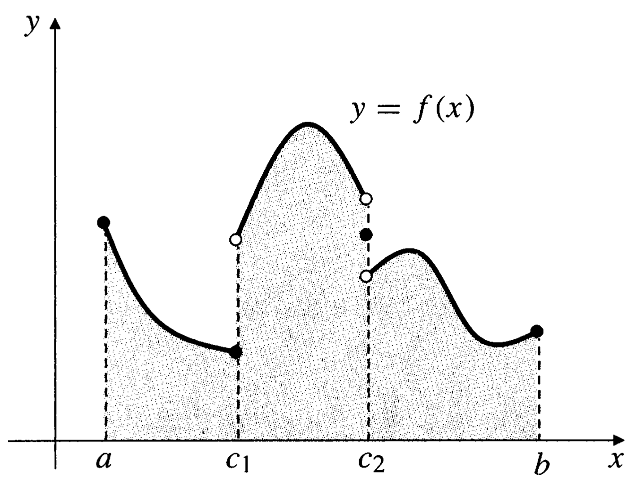
Vi definierar integral av en sådan funktion som summan av integraler av denna funktion över de interval där den är kontinuerlig.

Definition. (5 , s. 312 i A)

Låt $c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_n$ vara punkter på reella linjen. en funktion f definierad på $[c_0, c_n]$ är styckviskontinuerlig på $[c_0, c_n]$ om för varje i, $1 \leq i \leq n$ finns en funktion F_i kontinuerlig på $[c_{i-1}, c_i]$ som sammanfaller med f på öppna intervallet (c_{i-1}, c_i).

Integralen av f över $[c_0, c_n]$, $a = c_0$, $b = c_n$, definieras i det fallet som

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$$



Intagralkalkylens huvudsats och Medelvärdessatsen för integraler och bevis till dem.

Innan vi ger bevis till **Intagralkalkylens huvudsats**, betraktar vi en hjälpsats som heter

Medelvärdessatsen för integraler. Det är Theorem 4, på sid. 310 i Adams.

Om f är en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$, så finns det en punkt $c \in [a, b]$ sådan att

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

□

Beviset till Medelvärdessatsen för integraler.

Det att funktionen f är kontinuerlig på ett begränsat slutet interval medfär att den antar sitt maximala värde $\max_{x\in[a,b]} f(x) = M = f(u)$ och minimala värdet $\min_{x\in[a,b]} f(x) = m = f(l)$ i några munkter u och l ur $[a, b]$ så att

$$m = f(l) \leq f(x) \leq f(u) = M \tag{5}$$

för alla x på $[a, b]$.

En av egenskaper hos bestämda integralen medför att om för två kontinuerliga funktioner g och p gäller att

$$g(x) \leq p(x)$$

för alla $x \in [a, b]$ så måste

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b p(x)dx$$

Vi tillämpar den egenskap till olikheten (5) och får

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

Dela vänster och höger av den olikheten med $(b-a)$ och få

$$m = f(l) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(u) = M$$

Vi observerar nu att talet $\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)$ ligger mellan två värden $f(l)$ och $f(u)$ av kontinuerliga funktionen f på ett intervall. Enligt satsen om mellanliggande värden av kontinuerliga funktioner måste finnas en punkt c mellan punkterna l och u sådan att $f(c)$ är lika med detta mellanliggande talet:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Sista relationen medför efter multiplikation med $(b-a)$ påståendet i satsen:

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)dx$$

■

Definition. Värdet

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

kallas medelvärdet av funktionen f på intervallet $[a, b]$.

Vi formulerar igen och ger bevis till

Integralkalkylens huvudsats, eller Newton-Leibnitz satsen. (Theorem 5 , sid. 313 i Adams)

Låt f vara en kontinuerlig funktion på ett intervall I som innehåller en punkt a

Del 1. Låt F vara en funktion definierad på I med

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds \tag{6}$$

Då är F en deriverbar funktion på I och att dess derivata i punkten x är lika med $f(x)$ - värdet av funktionen under integralen i punkten x:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{7}$$

Del 2.

Låt G vare en vilken primitiv funktion som helst till f så att $\frac{d}{dx}G(x) = f(x)$ på I.

Då gäller

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{8}$$

för alla $b \in I$.

□

Bevis till Integralkalkylens huvudsats, eller Newton-Leibnitz satsen.

Vi bevisar först Del 1 och använder derivatans definition först och Medelvärdessatsen för integraler sedan .

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}F(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \\
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)dx &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} (h\, f(c))
\end{aligned}$$

Där $c = c(h)$ är en punkt som ligger mellan x och $x+h$, och är beroende av h. Observerar att h i täljaren och nämnaren kancellerar. Lägg märke till att $\lim_{h\to 0} c(h) = x$ enligt "satsen om två polismännen". Dessa två observationer och det att f är kontinuerlig leder till slutsatsen:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to 0} f(c(h)) = f(x)$$

Vi bevisar nu Del 2 i satsen.

Det att $\frac{d}{dx}G(x) = f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ medför att $F(x) = G(x) + C$ för någon konstant C, eftersom funktionen $F(x) - G(x)$ har derivatan noll och måste vara konstant. Detta medför att

$$\int_a^x f(s)ds = F(x) = G(x) + C$$

Med att sätta $x = a$ i formeln för integralen får vi $0 = G(a) + C$ och $C = -G(a)$. Sätt nu $x = b$ och får

$$\int_a^b f(s)ds = G(b) + C = G(b) - G(a)$$

■