Variabelsubstitution. Partiell integration. Areaberäkning.

Vi har sett att Integralkalkulens huvudsats låter få fram enkla analytiska formler för integraler i fall vi kan beräkna en primitiv funktion till funktionen under integralen. Vi kommer att betrakta några enkla metoder för att beräkna primitiva funktioner.

Vi inför en standart beteckning för primitiv funktion F till en funktion f:

$$F(x) = \int f(x)dx + C$$

Delvist på grund av den beteckning använder man ofta namnet **obestämd integral** för primitiva funktioner. Vi påminner här formeln för **bestämda integralen** från Integralkalkylens huvudsats (Newton-Leibnitz satsen) :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Beräkningen av obestämda integraler (primitiva funktioner) är ett avgörande steg i praktisk analytisk beräkning av bestämda integraler. Det finns ett antal enkla standarta formler för primitiva funktioner som följer från tabeller med derivator.

Vi kommer att betrakta några enkla metoder att reducera beräkning av svårare obestämda integraler (primitiva funktioner) till standarta formler.

Integration genom variabelsubstitution.

Exempel.

Beräkna följande obestämd integral

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

.

Vi kommer ihåg att $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$.

Detta gör att vi kan tolka uttrycket under integralen som produkten av derivatan av $\ln(x)$ och en enkel funktion av $\ln(x)$, så att vi kan primitiva funktionen till den enkla funktionen:

$$\frac{\ln x}{x} = \ln(x)\frac{1}{x} = \ln(x)\frac{d}{dx}(\ln(x))$$

Vi använder nu följande ormel för primitiv funktion av enkla funktionen t:

$$\int t dt = \frac{t^2}{2}$$

eftersom

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}\right) = t$$

Vi tillämpar dessa formler till $t = \ln(x)$.

Kedjeregeln medför då att

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right] = \ln(x)\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \ln(x)\frac{1}{x} = \frac{\ln(x)}{x}$$

Vi kan nu beräkna en primitiv funktion (obestämd integral) av vänsterledet och högerledet i sista formeln. Primitiva funktionen av derivatan ger funktionen under derivatans tecken (enligt definitionen av primitiv funktion) och vi får en analytisk lösning till problemet:

$$\int \ln(x)\frac{1}{x}dx = \frac{(\ln(x))^2}{2} + C$$

där en godtycklig konstant är tillägt.

Variabelsubstitution i obestämd integral med hjälp av kedjeregeln.

Primitiva funktioner på formen $\int F'(g(x))g'(x)dx$ kan beräknas med hjälp av kedjeregeln

$$\frac{d}{dx}(F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

där vi har produkt av två degivator i högerledet. Det är viktigt att komma ihåg att uttrycket $F'(g(x))$ betyder derivatan av funktionen F beräknad i punkten $g(x)$, inte derivatan av sammansatta funktionen som är beräknad ovan och är lika med produkt av två derivator (en av F och en av g).

Om vi beräknar primitiv funktion av högerled och vänsterled i uttrycket för kedjeregeln kommer vi till formeln

$$F(g(x)) + C = \int F'(g(x)) \cdot g'(x)dx \tag{1}$$

där primitiva funktionen (antiderivata i Adams!) av derivatan $\frac{d}{dx}(F(g(x))$ i vänster har givit funktionen som stått under derivatans tecken. Obestämda integralen och derivatan är "inversa operationer" till varandra.

Variabelsubstitution på explicit form

Man kan också tolka sista formeln lite enklare med att introducera en ny variabel $u = g(x)$ i uttrycket $\int F'(g(x)) \cdot g'(x)dx$ och **formelt tolka** där $g'(x)dx$ som $u'dt = du$ och $F'(g(x)) = F'(u)$ som leder till lite kortare formler i mitten av beräkningen

$$\begin{aligned} \int F'(g(x)) \cdot g'(x)dx &= \int F'(u)du = && (2)\\ F(u) + C &= F(g(x)) + C && (3)\\ g'(x)dx &= du; \qquad F'(g(x) = F'(u) && (4) \end{aligned}$$

Vi kan också skriva om samma formeln ännu kortare för $f(x) = F'(x)$. Det är den formeln som oftast kallas **variabelsubstitution i obestämd integral** eftersom vi ersätter beräkningen av integral över variabeln x, med en integral av en enklare funktion över en ny variabel $u = g(x)$:

$$
\begin{aligned}
\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx &= \int f(u)du \qquad (5)\\
g'(x)dx &= du; \qquad (6)
\end{aligned}
$$

I fall vi kan en primitiv funktion F till funktionen f, som vi förutsatt innan, så är problemet löst som vi ser i föregående formeln:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

där det menas att $F'(u) = f(u)$.

Exempel.

Beräkna obestämd integral

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+1}dx &= \int \frac{1}{x^2+1}\left[\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)\right]dx = \\
\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du &= \frac{1}{2}\int \left[\frac{d}{du}\ln(u)\right]du = \frac{1}{2}\ln(u) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C
\end{aligned}
$$

där vi andvände variabelsubstitutionen:

$$u(x) = x^2 + 1, du = 2xdx$$

Exempel.

Beräkna obestämd integral

$$
\begin{aligned}
\int x\exp(-x^2)dx &= \frac{-1}{2}\int \exp(-x^2)\frac{d}{dx}\left(-x^2\right)dx = \\
\frac{-1}{2}\int \exp(u)du &= \frac{-1}{2}\exp(u) + C = -\frac{-1}{2}\exp(-x^2) + C
\end{aligned}
$$

där vi andvände variabelsubstitutionen:

$$u(x) = -x^2, du = -2xdx.$$

Variabelsubstitution i bestämd integral. Sats 6, sid. 322. (Beviset kan uppstå på tentan)

Låt g vara deriverbar funktion med kontinuerlig derivatan och låt f vara en kontinuerlig funktion på värdesmängden av g (det är mängden V av alla tal u på formen $u = g(x)$ med $x \in [a, b]$). Då

$$\int_a^b f(g(x)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \qquad (7)$$

I fall vi kan en primitiv funktion F till f, kan svaret skrivas explicit:

$$\int_a^b f(g(x)g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a)) \qquad (8)$$

□

Bevis.

Låt F vara primitiv funktion (obestämd integral) till f: $F'(u) = f(u)$ för alla $u \in V$. Kedjeregeln medför att

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Integrationen av vänsterledet och högerledet från a till b medför

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_a^b \left[\frac{d}{dx}F(g(x))\right] dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

■

Partiell integration

Partiell integration handar om att kanske inte direkt beräkna, men att kunna förenkla en integral (obestämd eller bestämd). Den metoden låter förenkla integraler där det står produkt av en funktion $U(x)$ och en derivata $\frac{d}{dx}V(x) = V'(x)$ av en annan funktion $V(x)$ under integraltecken:

$$\int U(x)\left(\frac{d}{dx}V(x)\right) dx = \int U(x)V'(x)dx$$

Metoden är baserad på produktregeln för derivata och på Integralkalkylens huvudsats:

$$\frac{d}{dx}(U(x)V(x)) = U(x)\frac{dV}{dx} + V(x)\frac{dV}{dx}$$

Med att beräkna obestämd integral av vänster och höger fås

$$\int \frac{d}{dx}(U(x)V(x))\, dx = \int U(x)\frac{dV}{dx}dx + \int V(x)\frac{dU}{dx}dx$$

som medför

$$U(x)V(x) = \int U(x)\frac{dV}{dx}dx + \int V(x)\frac{dU}{dx}dx$$

Med att flytta $\int V(x)\frac{dU}{dx}dx$ åt vänster sida fås följande formeln för partiell integration:

$$\int U(x)\frac{dV}{dx}dx = U(x)V(x) - \int V(x)\frac{dU}{dx}dx \tag{9}$$

Den formeln kan skrivas lite mera symmetriskt och kompakt om vi inför differentialbetäckningen $\frac{dV}{dx}dx \overset{\text{def}}{=} dV$ och använder den i formeln för partiell integration:

$$\frac{dV}{dx}dx \overset{\text{def}}{=} dV, \qquad \frac{dU}{dx}dx \overset{\text{def}}{=} dU$$

$$\int UdV = UV - \int VdU \tag{10}$$

Exempel.

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}dx &= \int \overbrace{-x}^{U} \frac{d}{dx}\overbrace{(e^{-x})}^{V}dx = -xe^{-x} - \int e^{-x}\frac{d}{dx}\overbrace{(-x)}^{V}dx = \\ -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx &= -xe^{-x} - \underbrace{\int e^{-x}d(-x)}_{t=-x} = -xe^{-x} - e^{-x} + C\end{aligned}$$

Exempel.

$$\int \ln(x)dx = \int UdV = x\ln x - \int x\frac{d\ln(x)}{dx}dx = x\ln x - \int x\frac{1}{dx}dx = x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x + C$$

Den metoden funkar i fall integranden innehåller ett polynom av x multiplicerad med exponent $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ eller anna funktion som kan direkt integreras.

Annan situation är om det står en funktion som ln eller arcsin som inte kan direkt integreras, men som har enkel derivata. Man kan försöka använda den funktionen som U funktionen och resten som dV.

Man kan ibland använda partiell integration för att efter några steg få en kombination av sökta integralen och kända funktioner.

Exempel.

$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Exempel.

$$\int x^3\ln(x)^2dx$$

observera att efter två partiella integrationer omvandlas $\ln(x)^2$ i funktion $\frac{1}{x}$ som är lätt att integrera.

$$\begin{aligned}\int x^3\ln(x)^2dx &= \int \ln(x)^2 d\left(\frac{x^4}{4}\right) = \\ \ln(x)^2\left(\frac{x^4}{4}\right) - \int \frac{x^4}{4}(2\ln x)\frac{1}{x}dx &= \\ \ln(x)^2\left(\frac{x^4}{4}\right) - \int \frac{x^3}{2}\ln(x)dx &= \ln(x)^2\left(\frac{x^4}{4}\right) - \frac{1}{2}\int \ln(x)d\left(\frac{x^4}{4}\right) = \\ \ln(x)^2\left(\frac{x^4}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln(x)\left(\frac{x^4}{4}\right) + \int \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{4}\right)dx &= \ln(x)^2\left(\frac{x^4}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln(x)\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{x^4}{32} + C\end{aligned}$$

Bestämd integral över ett intervall $[a,b]$ med hjälp av partiell integration.

$$\int_a^b UdV = U(b)V(b) - U(a)V(a) - \int_a^b VdU = U(x)V(x)\big|_a^b - \int_a^b VdU \tag{11}$$

Exempel.

Bestämd integral över intervallet $[1, e]$ med samma integrand som ovan beräknas på följande sätt:

$$\int_1^e x^3 \ln(x)^2 dx = \left(\ln(x)^2 \left(\frac{x^4}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln(x)\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{x^4}{32}\right)\Bigg|_1^e =$$
$$\frac{e^4}{4} - \frac{1}{8}e^4 + \frac{e^4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{5}{32}e^4 - \frac{1}{32}$$

Exempel.

$$\int_0^1 x\arctan(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$
$$\pi/8 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \arctan(x)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{\pi-2}{4}$$

Arean av fugurer i planet. (5.7 i Adams)

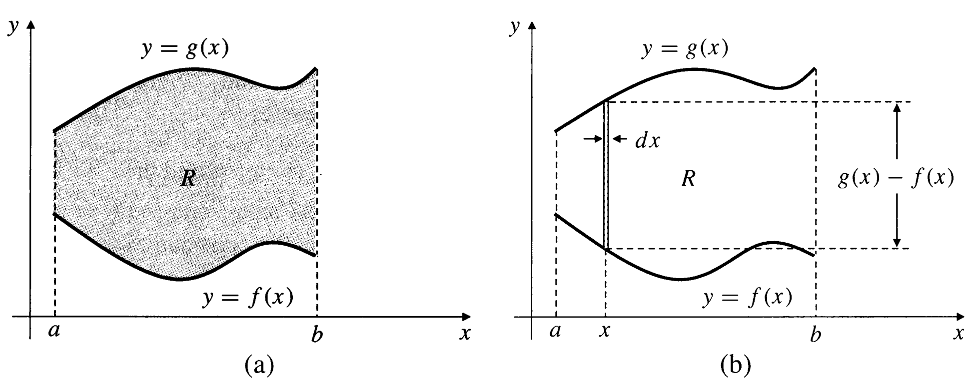
Arean mellan två grafer.

Låt två två funktioner f och g definierade på intervallet $[a, b]$, vara kontinuerliga och uppfylla olikheten

$$f(x) \leq g(x)$$

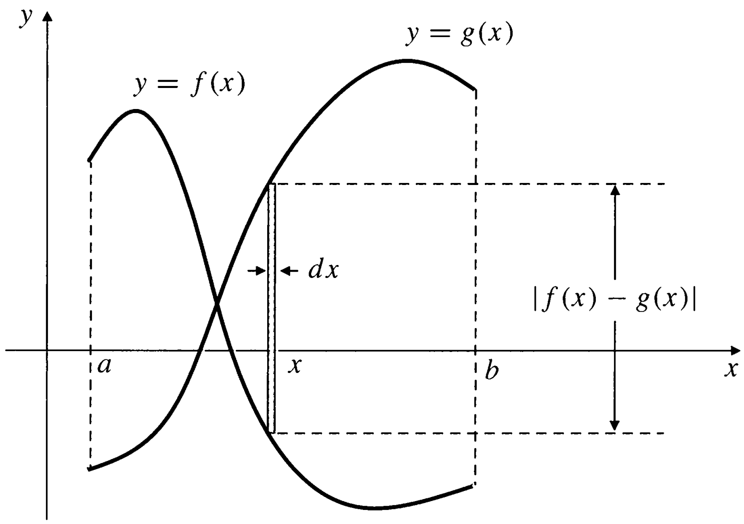
på $[a, b]$. -arean av figuren mellan grafer av dessa funktioner är lika med integral

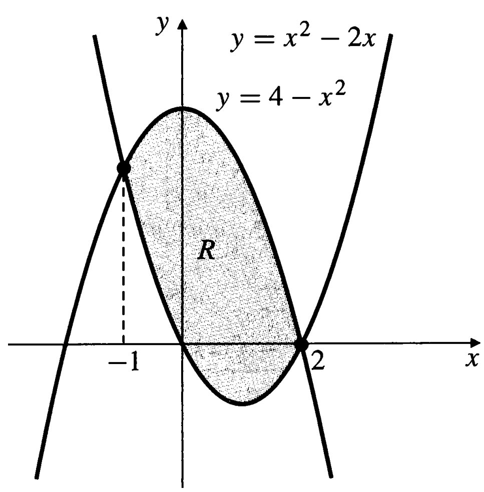
$$Arean = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$



Arean mellan två godtyckliga grafer.

$$Arean = \int_a^b |f(x) - g(x)dx|$$





Exempel (Example 2 i Adams)

Bestäm arean av begränsade figuren mellan kurvor $y = g(x) = x^2 - 2x$ och $y = f(x) = 4 - x^2$.

Man behöver först rita kurvor och hitta deras skärningspunkter för att kunna rita en bild av figuren som är inte explicit definierad ännu.

Sedan kan man bestämma vilken integral eller kanske flera integraler som ger arean av den figuren.

Vi observerar först att $f-$ kurvan ligger ovanför g - kurvan vid $x = 0$. Det betyder att $f-$ kurvan är förmodligen "övre kurvan" som begränsar arean.

Vi behöver hitta skärningspunkter mellan kurvor för att kunna framställa begränsade figuren mellan dem. Koordinater av skärningspunkter uppfyller följande ekvationer:

$$\overset{\text{första\_kurvan}}{x^2 - 2x} = y = \overset{\text{andra\_kurvan}}{4 - x^2}$$

Det ger en andragradsekvation för x - koordinater av skärningspunkter:

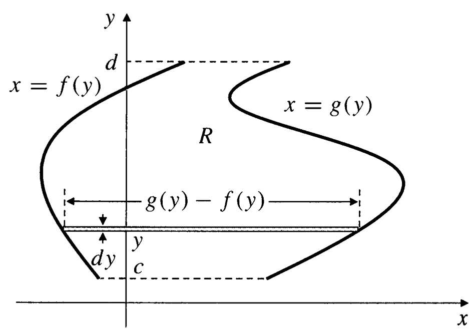
$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - 4 &= 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-2)(x+1) &= 0 \\ x_1 &= 2; \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

Punkterna x_1 och x_2 begränsar intervallet $[-1, 2]$ av x - koordinater som kan uppstå för punkter (x, y) inom begränsade figuren mellan två givna kurvor (se bilden). Arean kan uttryckas med hjälp av integralen

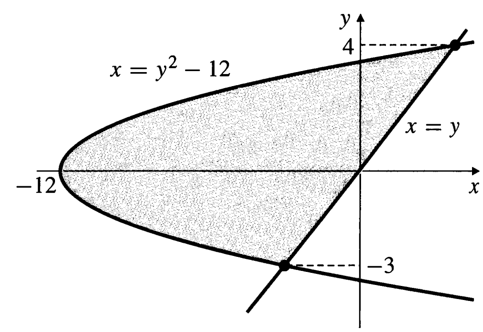
$$\begin{aligned} Arean(\Diamond) &= \int_{-1}^{2} (4 - x^2) - (x^2 - 2x) dx = \\ &= \int_{-1}^{2} (4 - 2x^2 + 2x) dx = \left(4x - \frac{2}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{-1}^{2} = \\ &= 4(2) - \frac{2}{3}(8) + 4 - \left(-4 + \frac{2}{3} + 1\right) = 9 \end{aligned}$$

Användning av horisontella integrationselement.

$$Area = \int_c^d g(y) - g(y)dy$$



(a)



(b)

Exempel.

Bestäm arean av figuren som ligger åt höger från "liggande" parabola $x = y^2 - 12$ och åt vänster från linjen $y = x$ (se bilden).

Vi lägger märke till att den figuren är lämpligare att skära i x - riktningen. Detta gör att arean är bättre att framställa som integral med av seende på y - koordinata.

Vi behöver hitta koordinater av skärningspunkter. Löser ekvationen för y- koordinaterna:

$$\begin{aligned} y^2 - 12 &= x = y \\ y^2 - y - 12 &= 0 \\ y^1 &= -3; \quad y_2 = 4 \\ (y-4)(y+3) &= 0 \end{aligned}$$

Observera också att $y^2 - 12 \leq y$ då $-3 \leq y \leq 4$. Arean framställes som

$$\begin{aligned} Area &= \int_{-3}^{4} (y - (y^2 - 12))dy = \int_{-3}^{4} ydy + \int_{-3}^{4} -y^2 dy + \int_{-3}^{4} 12dy = \\ \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 12y \right)\Bigg|_{-3}^{4} &= \left(\frac{16}{2} - \frac{64}{3} + 48 \right) - \left(\frac{9}{2} + \frac{27}{3} - 36 \right) = \\ \frac{7}{2} - \frac{91}{3} + 84 &= \frac{21}{6} - \frac{182}{6} + \frac{504}{6} = \frac{343}{6} \end{aligned}$$

Vi kunde få samma svar med att framställa samma arean som summan av två integraler med avseende på x,

$$Arean = 2\int_{-12}^{-3} \sqrt{12 + x}dx + \int_{-3}^{4} \left(\sqrt{12+x} - x \right) dx$$

men beräkningen skylle vara mera komplicerad.