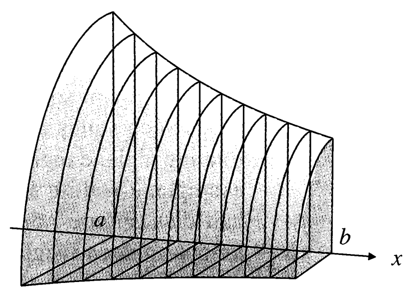
Volum av rotationskroppar. Båglängd, rotationsytor. Adams 7.1, 7.2, 7.3

Volum av rotationskroppar. Båglängd, rotationsytor.

Integration av rationella uttryck, partialbråksuppdelning. Exempel med inversa substitutioner.

Generaliserade integraler av oändliga funktioner och generaliserade integraler över oändliga intervall.

Volum av kroppar. Metod med skivor.



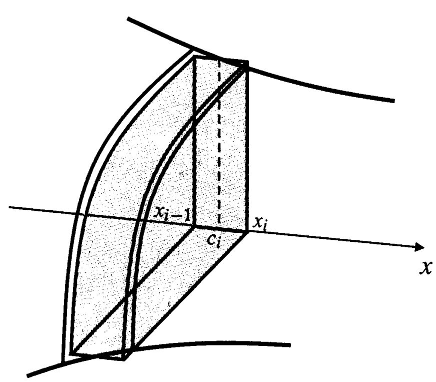
Vi vill införa begreppet volum av en godtycklig kropp och börjar med att skära kroppen i stort antal tynna parallella skivor med plan ortogonala till $\cancel{x}$ - axeln som på bilden.

Låt snittet mellan sådana plan och kroppen ha arean $A(x)$ beroende på punkten x där planet skär x - axeln. Vi förutsätter dessutom att $A(x)$ är en kontinuerlig funktion av x.

Låt a och b beteckna minimala och maximala x - koordinater för punkter inom kroppen. För att beskriva bilden ovan med formler inför vi en indelning av intervallet $[a, b]$ med punkterna $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, så att $a = x_0$ och $b = x_n$ och betraktar skivor som plan genom dessa punkter skär av koppen.

Den konstruktioner påminner resonemang som vi genomförde för att definiera Riemanns summor och bestämd integral. Det är naturligt att tänka om kroppens volum som summan av volum för alla skivor som kroppen består av.

Sedan approximerar vi varje skiva med en (väldigt flat om n är stort!) cylindrisk skiva som har bottens arean $A(c_i)$ och höjden $\Delta(x_i) = x_i - x_{i-1}$.Punkten c_i är någon punkt mellan x_i och x_{i-1}, se på bilden



Dessa cylindrar har volum $V_i = A(c_i)\,\Delta(x_i)$. Vi approximerar kroppens volum med summan av volumer av alla dessa cylindriska skivor:

$$\sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta(x_i)$$

Detta är Riemanns summa för kontinuerliga funktionen $A(x)$ över intervall $[a, b]$. Med att beräkna gränsvärdet av den summa med $n \to \infty$ och $|\Delta(x_i)| \to 0$ får vi en bestämd integral av snittens area $A(x)$ som är naturligt att betrakta som kroppens volum:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\Delta(x_i)|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta(x_i) \tag{1}$$

I praktiska situationer är det ett särskild problem att beräkna arean $A(x)$ för en konkret kropp. Den typ av problem kommer att betraktas i tredje läsperioden.

Volum av rotationskroppar. Metoden med skivor.

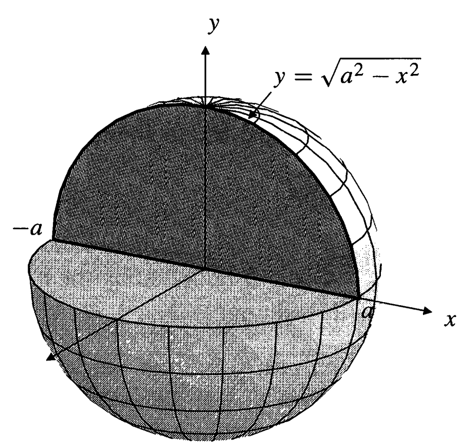
I fall med rotationskroppar är det lätt att beräkna arean $A(x)$ eftersom snittet av en rotationskropp med plan ortogonala mot rotationsaxeln är cirkelskivor.

Om figuren R begränsad med kurvan $y = f(x)$, linjen $y = 0$, och linjer $x = a$ och $x = b$, roteras runt x - axeln, den bugger en rotationssymmetrisk kropp.

Snittet av den kroppen med ett plan ortogonalt mot x - axeln genom punkten x,är cirkel med radien $|f(x)|$. Arean $A(x)$ av det snittet är lima med $\pi\,(f(x))^2$. Formeln för volum ör rotationskroppen följer då från allmänna formeln ovan.

Exempel. Volum av ett klot.

_Beräkna volum av ett klot med radien a. Ett klot kan genereras med rotation a en halv cirkelskiva av radien a, runt x- axeln, see bilden



Randen av cirkelskivan är en cirkel med ekvation $y(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Volum beräknas då enligt allmänna formeln:

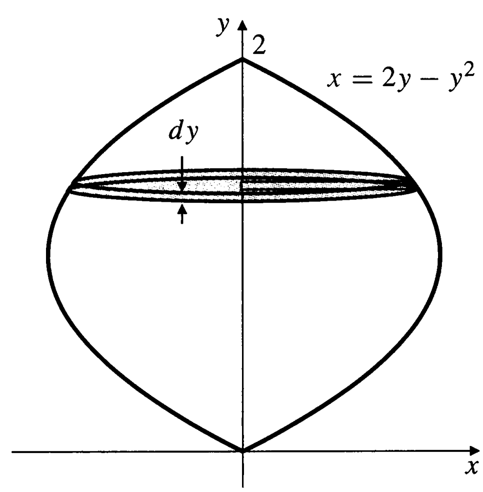
$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-a}^{a}(y(x))^2\,dx = \pi\int_{-a}^{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx \\ &= \pi\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx \overset{\text{jämn\_funktion}}{=} 2\pi\int_{0}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx = \\ 2\pi\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a &= 2\pi\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

Svar: $Volum = \frac{4}{3}\pi a^3$.

■

Exempel

Beräkna volum av kropp genererad med rotation av begränsade figuren mellan y - axeln och kurvan $x = 2y - y^2$ - runt y axeln. Se bilden.



Parabeln $x = 2y - y^2$ har rötter $y = 0$ och $y = 2$.

Ett plan genom punkt y på $y-$ axeln, ortogonal mot y - axeln som är rotationsaxeln, skär av en cirkelskiva med radien $r(y) = 2y - y^2$ från kroppen. Volum representeras med integral med avseende på y i det fallet.

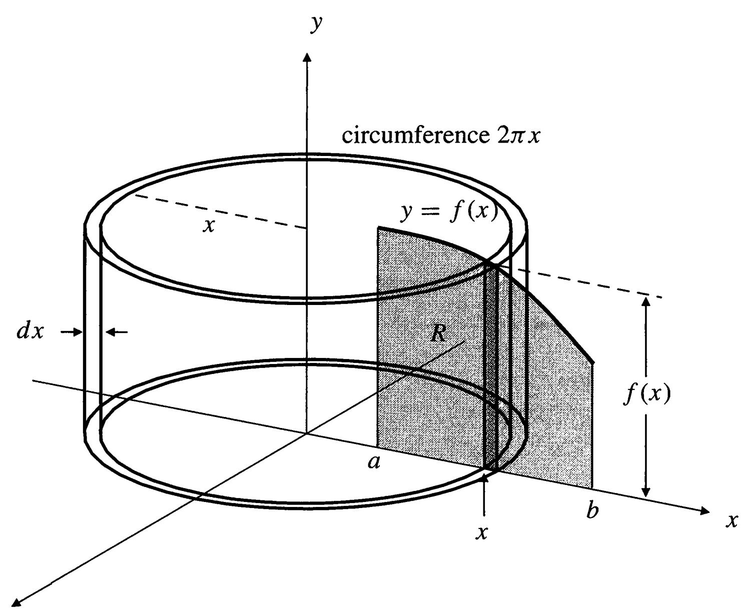
$$\begin{aligned} Volum &= \pi\int_0^2(2y-y^2)^2dy = \pi\int_0^2\left(4y^2-4y^3+y^4\right)dy \\ &= \pi\left(\frac{4}{3}y^3-\frac{4}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5\right)\Big|_0^2 = \\ &= \pi\left(\frac{32}{3}-16+\frac{32}{5}\right)=\pi\frac{16}{15} \end{aligned}$$

Svar: $Volum = \pi\frac{16}{15}$.■

Volum av rotationskroppar. Metoden med cylindriska skal.

Ibland är det lättare att betrakta annan metod för att beräkna volum av rotationskroppar. Det händer om vi har en kurva definierad som graf av en funktion av x: $y = f(x)$, men rotationsaxeln är inte x axeln men y - axeln. För att använda metoden med skivor i det fallet, måste man uttrycka x som funktion av y. Det kan vara svårt eller helt omöjligt, speciellt om funktionen f ovan saknar inversafunktionen.

I det fallet är det lättare att approximera kroppen inte med cirkelskivor, men med cylindriska skal som på bilden.



Volumen dV av tynna cylindriska skalet med tjöckleken dx som på bilden, kan approximeras som

$$dV = f(x)2\pi x dx \tag{2}$$

där $2\pi x dx$ är arean av botten av cylindriska skalet och $f(x)$ är dess höjd, så att volumen är produkten av bottens area och höjden.

Totala kroppens volum kan framställas då med integralen

$$V = \int_a^b f(x)2\pi x dx \tag{3}$$

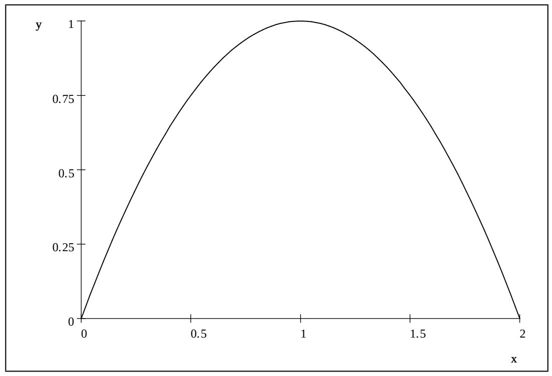
genom gränsövergången av Riemanns summor på samma sätt som tidigare volum med hjälp av skivor.

Exempel.

Beräkna volumen av rotationskroppen som är byggd då figuren begränsad av parabeln $y = 2x - x^2$, och intervall $[0, 2]$ på x - axeln, roteras runt y - axeln.

Vi betraktar här samma figur mellan parabeln och koordinataxeln som innan, men roterar den runt annan axel.

Bilden på roterande kurvan $y = 2x - x^2$:

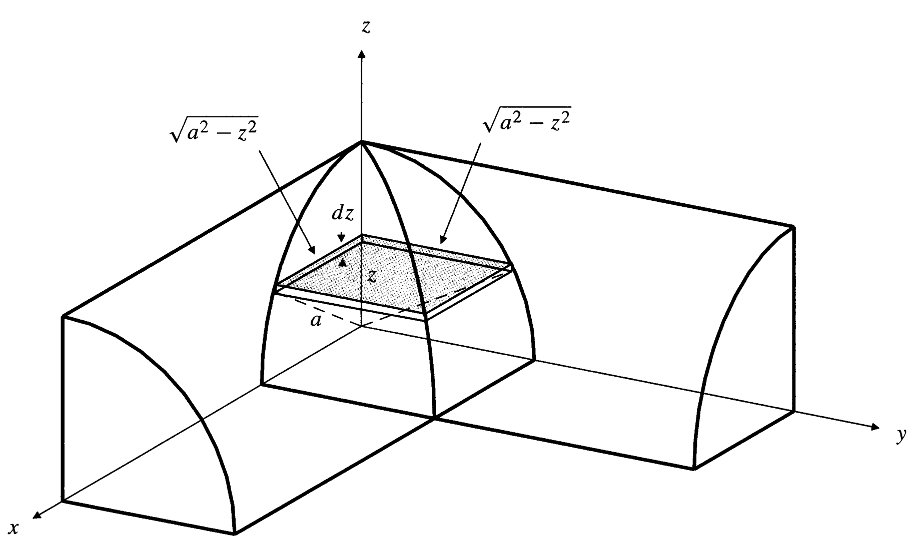


Formeln för volum med hjälp av cylindriska skal:

$$
\begin{aligned}
Volum &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx = \\
2\pi \int_0^2 x\left(2x - x^2\right) dx &= \\
2\pi \int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx &= 2\pi \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_{x=0}^2 = 2\pi\left(\frac{2}{3}2^3 - \frac{1}{4}2^4\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) = 32\pi\frac{4-3}{12} = \pi\frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

Svar: $Volum = \pi\frac{8}{3}$.■

Mera volumberäkning med hjälp av skivor



Exempel.

Beräkna volum av snittet av två likadana cylindrar med radier lika med a, och med axlar som skär varandra och är ortogonala mot varandra. En åttonde del av kroppen är framställd på bilden.

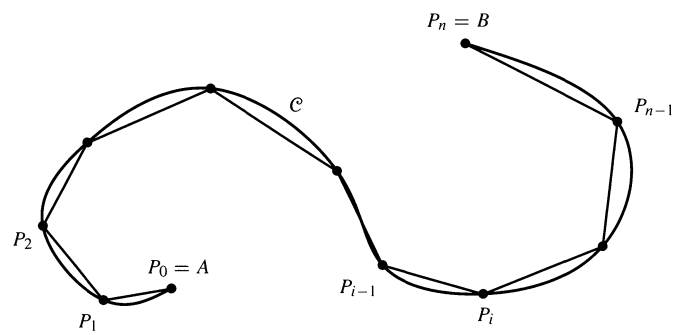
Snittet av den åttonde delen av kroppen på höjden z är kvadrat med sidan $\sqrt{a^2 - z^2}$. Dess area är $A(z) = a^2 - z^2$.

$$Volum = 8\int_0^a (a^2 - z^2)dz = 8\left(a^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{16}{3}a^3$$

■

Bågländgden för funktions graf

Bågländgden av en godtycklig kurva kommer att betraktas i tredje läsperioden.



Ideen med längdens begrepp följer samma spår som begreppet med Riemans summor och bestämd integral. Man approximerar kurvan med hjälp av ett polygon och betraktar gränsvärdet av polygonets längd (i fall den existerar) då antalet segment i polygonet går mot oändligheten och länderna av alla segment går mot noll.

Vi kommer att betrakta här bara fallet då kurvan av intresse är graf till en funktion med kontinuerlig derivata.

Låt f vara en funktion definierad på ett slutet begränsat intervall $[a, b]$ som har kontinuerlig derivata f' där. Låt $\mathfrak{C}$ vara kurvan som är graf till funktionen f. Vi vill definiera längden av $\mathfrak{C}$ som gränsvärdet av approximationer av den kurvan med polygon med längdena av alla segment som går mot noll och antalet segment som går mot oändlighet.

För en indelning av intervallet $[a, b]$: $\{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ vi betraktar polygon som går genom punkter $P_i = (x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, ..., n$.

Längden av polygon genom dessa punkter är summan av längderna av segment mellan konsekventa punkter P_{i-1}och P_i :

$$\begin{aligned} l_i &= |P_i - P_{i-1}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \\ &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 - (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \end{aligned}$$

Längden av hela polygonet genom punkter P_0, P_1,..., P_{n-1}, P_n är

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=1}^{n} |P_i - P_{i-1}| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= \Delta(x_i)\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}} \end{aligned}$$

där $\Delta(x_i) = |x_i - x_{i-1}|$.

Vi lägger märke till att enligt mellanvärdessatsen (för derivator) finns det en punkt $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ sådan att

$$\frac{(f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} = f(c_i)$$

Härifrån följer att summan

$$L_n = \Delta(x_i) \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}$$

är Riemanns summa för funktionen $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ och har ett unikt gränsvärde då $n \to \infty$ och $\Delta(x_i) \to 0$:

$$s = s(\mathfrak{C}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx \tag{4}$$

som är naturligt att tolka som båglängden av kurvan $\mathfrak{C}$.

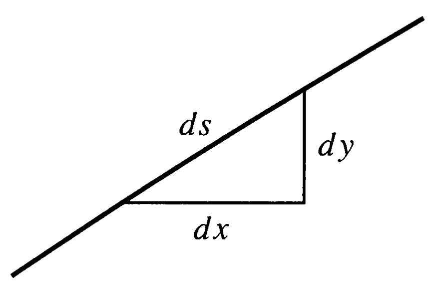
Man kan också tolka den integral lite fritt som integral över båglängdens "element" ds:

$$s = \int_{x=a}^{x=b} ds$$

där med hjälp av lite fria beteckningar $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx$ och $\left(\frac{df}{dx} dx\right) = dy$ kommer vi till relationen

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

där manlätt observerar uttrycket av Pythagorsatsen:



Exempel

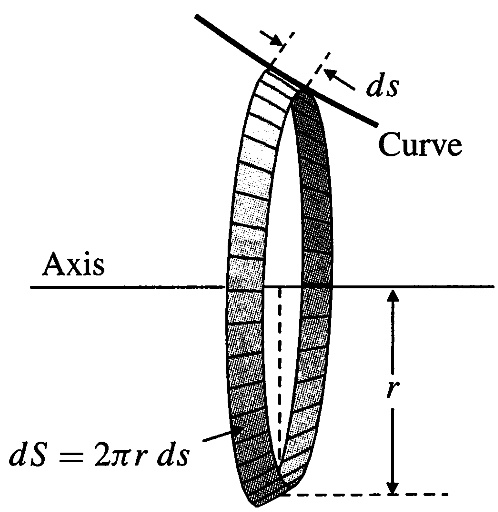
Bestäm längden av bågen på grafen av funktionen $y = x^{2/3}$ för x mellan $x = 1$ och $x = 8$.

$\dfrac{dy(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$ och är kontinuerlig mellan $x = 1$ och $x = 8$ (inte överallt!) och $x^{-1/3} > 0$ där. Längden av bågen är framställd med formeln

$$
\begin{aligned}
s &= \int_1^8 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^{-2/3}}\,dx = \int_1^8 \sqrt{\frac{9x^{2/3}+4}{9x^{2/3}}}\,dx = \\
&= \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{3x^{1/3}}\,dx = \left\{ \text{variabelbyte :} \quad \begin{array}{r} u = 9x^{2/3}+4 \\ du = 6x^{-1/3}dx \\ u(1) = 13; \quad u(8) = 40 \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{18}\int_{13}^{40} u^{1/2}\,du = \frac{1}{27}u^{3/2}\Big|_{13}^{40} = \frac{40\sqrt{40} - 13\sqrt{13}}{27}
\end{aligned}
$$

■

Arean av rotationsytor



Arean av rotationsyta genererad med rotation av en graf av funktion $y = f(x)$ runt x - axeln kan definieras som gränsvärdet av summan av areor av strimlor som på bilden som fås med att skära ytan med plan ortogonala mot x - axeln genom punkter x_i på x- axeln.

Arean av en sådan tynn strimla approximeras väl med produkt av dess längd och dess Δs_i:

$$S_i = (Strimlanslängd)\,(x_i) \times \Delta s_i$$

Varje strimla har längden lika med längden av cirkeln med radien $r(x_i) = f(x_i)$ i det fallet. Vi observerar ochså att strimpalns bredd är $\Delta s_i = \sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\Delta(x_i)$.

Detta medför att $S_i = 2\pi r(x_i) \times \Delta s_i$ och hela ytans area approximeras med

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi r(x_i) \times \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi r(x_i)\sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\Delta(x_i)$$

Det är en Riemanns summa av funktionen $2\pi r(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$.Efter gränsövergången med $n \to \infty$, fås uttrycket för arean

$$Area = \int_a^b 2\pi r(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx \tag{5}$$

eller för $r(x) = f(x)$ förenklas formeln till

$$Area = \int_a^b 2\pi\,|f(x)|\,\sqrt{1+(f'(x))^2}dx \tag{6}$$

Vi påminner att i det faller roteras grafen av funktionen $y = f(x)$ runt x-axeln.

I fall då grafen av funktionen $y = f(x)$ roteras runt y-axeln är det lätt att se att $r(x) = |x|$ och samma formel ser ut som

$$Area = \int_a^b 2\pi\,|x|\,\sqrt{1+(f'(x))^2}dx \tag{7}$$

Det kan uppstå två fall till då betraktas grafen av funktionen $x = g(y)$ som kan roteras runt x - axeln eller runt y - axeln. Det är inte rimpligt att memorera alla dessa formler och är mera praktiskt att komma ihåg logiken bakom hur de uppstår i något fall, och skriva dem dem själv för varje konkret fall.

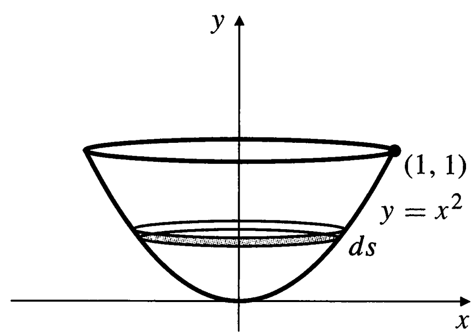


Figure 7.28 The area element is a horizontal band here

Exempel.

Bestäm arean av ytan som är skapad med rotation av en båge av parabeln $y = x^2$ för $0 \le x \le 1$ runt y - axeln.

Det är lätt att se från biilden att arean i det fallet framställes av följande allmän formel

$$Arean = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

I vårt konkreta fall med $f(x) = x^2$ ser fomeln ut som

$$Arean = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + (2x)^2}dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}dx$$

Det är lämpligt att införa en ny variabel $u = (x) = 1 + 4x^2$, $du = 8xdx$, $u(0) = 1$, $u(1) = 5$. Arean utttrycks då som

$$Arean = \frac{\pi}{4} \int_1^5 u^{1/2}du = \frac{\pi}{6} u^{3/2}\Big|_1^5 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

■