Ordinära differentialekvationer.

Materialet om ordinära differentialekvationer (ODE) i Adams är spritt över paragrafer i tre olika kapitlar: 3, 7, 18.

Bland annat:

§3.7 handlar om linjära ODE av andra ordningen med konstanta koefficienter

§ 7.9 andlar om olika förstaordningens ODE som kan lösas analytiskt

§18.1 diskuterar klassifikation av ODE.

§18.3 introducerar begreppet begynnelsevärdesproblem och diskuterar diskuterar existence och entydighet av deras lösningar samt numeriska metoder för att lösa ODE.

§18.5 handlar om icke homogena linjära ODE av högre ordningen med konstanta koefficienter.

§18.6 handlar om linjära icke homogena ODE med konstanta koefficienter.

Vi kommer att lära bara enklare och mest användbara delar av materialet om ODE från dessa paragrafer i Adams.

Senare i kursen kommer ett kapitel i boken av Lay om **linjära system** ODE med konstanta koefficienter som tillämpning av linjär algebra.

Allt material om ODE inom kursen kommer att presenteras relativt kompakt i form av föreläsningsanteckningar. Det finns också ett lämpligt material till Studio 3 som handlar om ODE och till studio 6 som handlar om linjära system ODE med konstanta koefficienter.

Begynnelsevärdesproblem

För en funktion $f = f(t, y)$ av två variabler t, och y betraktas en ekvation på formen

$$y\prime(t) = f(t, y(t))$$

eller

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

Den kallas ordinär differentialekvation - ODE (med avseende på okända funktionen y). Vi förutsätter att funktionen f är kontinuerlig i båda variabler t, och y. (På riktigt kommer teorin för funktioner av flera variabler bara i tredje läsperioden).

Variabeln t har i de flesta tillämpningar meningen av tiden. Det är lämpligt på grund av detta att använda just t - beteckningen för den. (Adams använder x variabeln i boken)

Om funktionen f beror bara på t, d.v.s ekvationen ser ut som

$$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

så ges lösningen till ekvationen av primitiva funktionen

$$y(t) = \int f(t)dt + C$$

Vi observerar här att det finns **oändligt många lösningar** $y(t)$ som skiljas bara med en konstant.

I fall då f beror bara av y , d.v.s. ODE ser ut som

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

kallas den **autonom differentialekvation**.

ODE på allmän form är inte så lätt att lösa.

Ekvationer ovan innehåller bara första derivatan av okända funktionen och kallas på grund av detta **ODE av första ordningen.**

Om en ekvation innehåller andra derivatan, så kallas den **ODE av andra ordningen o.s.v.**

Det finns bara enstaka speciella typer av differentialekvationer som kan lösas analytiskt på papper, och vi kommer att betrakta 3-4 typer av sådana ekvationer.

Det finns numeriska metoder för att lösa ODE baserade på Taylor formeln. Dessa metoder kommer att betraktas mest på Studio 3, delvist med egen enklare kod, och delvist med hjälp av en Matlabfunktion ode45 och dess släktfunktioner.

På grund av att alla ODE har oändligt många lösningar, är det meningsfullt att formulera ett speciellt problem som kallas **begynnelsevärdesproblem** som i de flesta fall har en entydig lösning.

Definition. Problemet

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)), \quad a \leq t \leq b \\ y(t_0) = y_0, \text{ där } t_0 \in [a.b] \end{cases}$$

kallas **begynnelsevärdesproblem** för ODE $y' = f(t, y(t))$. Andra ekvationen $y(t_0) = y_0$ kallas ett begynnelsevillkor för $y(t)$ i en punkt (tid) $t = t_0$. Man kan speciellt välja $c = a$, men inte obligatoriskt. Det kan vara intressant att veta vad som hänt både efter och innan starttiden $t = t_0$.

Meningen med ett **begynnelsevärdesproblem** är att vi söker en speciell lösning bland oändligt många möjliga lösningar. Det är en lösning som vid en särskild tid $t = t_0$ antar ett givet värde y_0.

Lösningskurvor och riktningsfält

Det är lämpligt att titta på grafer av lösningar $y(t)$ till en differentialekvation **(lösningskurvor)**.

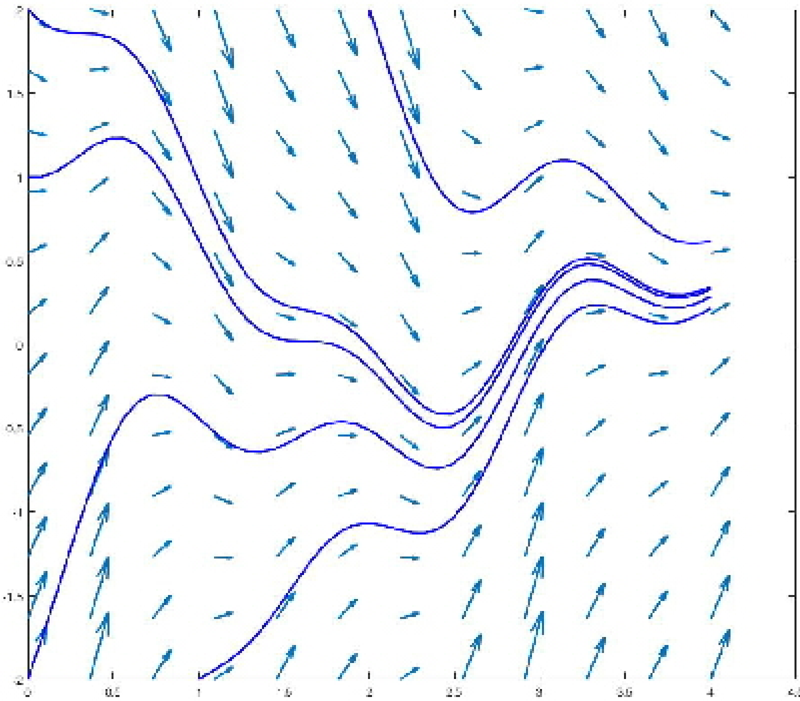
Vi påminner här geometriska meningen hos derivatan. Linjen men ekvationen

$$y = y(s) + (t - s)\, y'(s)$$

i (t, y) planet är en tangentlinje till grafen av funktionen $y(t)$ i punkten $(t_0, y(t_0))$.

Detta betyder att i varje punkt$(s, y(s))$ på **lösningskurvan** har tangentlinjen lutningen $f(s, y(s))$ eftersom $y'(s) = f(s, y(s))$.

Vi kan rita ett **riktningsfält** som svarar mot differentialekvationen med att för i varje punkt (t, y) rita en vektor med t - komponentet som är fixerad konstant, till exempel lika med ett, och med lutningen $f(t, y)$. Det är lätt att se på följande bild att lösningskurvor går så att de tangerar riktningsfältet i varje sin punkt.



Detta ger oss en vacker geometrisk tolkning för lösningar till differentialekvationen $y' = f(t, y(t))$.

Lösningar är funktioner y av t med grafer som i varje punkt $(t, y(t)$ tangerar riktningsfältet given av funktionen $f(t, y(t))$. Riktningsfältet ovan svarar mot **linjära ekvationen**

$$y' = -y + \sin(5t) + \cos(2t)$$

som liknar ett exempel givet i materialet till Studio 3. Allmän lösning till den ekvationen som ger alla möjliga lösningar är:

$$y(t) = \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{5}{26}\cos 5t + \frac{2}{5}\sin 2t + \frac{1}{26}\sin 5t + Ce^{-t}. \tag{1}$$

Olika lösningskurvor på bilden svarar mot olika konstanter C i sista formeln.

Man får fram den lösningen med att addera almänna lösningen $y(t) = C_1 e^{-t}$ till **homogena** ekvationen

$$y' = -y$$

och en **partikulär lösning** $y_p(t) = \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{5}{26}\cos 5t + \frac{2}{5}\sin 2t + \frac{1}{26}\sin 5t$ till icke homogena ekvationen

$$y' = -y + \sin(5t) + \cos(2t)$$

Partikulär lösningen sökes här på formen $y_p(t) = A\sin(5t) + B\cos(5t) + D\sin(2t) + F\cos(2t)$ med att sätta den anzatsen in i ekvationen och lösa ett linjärt system ekvationer för konstanter A, B, D, F.

Det är första exemplet på den approach för att lösa linjära ODE med ett högerled.

Exempel. (Ex.1 sid. 451 i Adams)

Betrakta en enkel ekvation

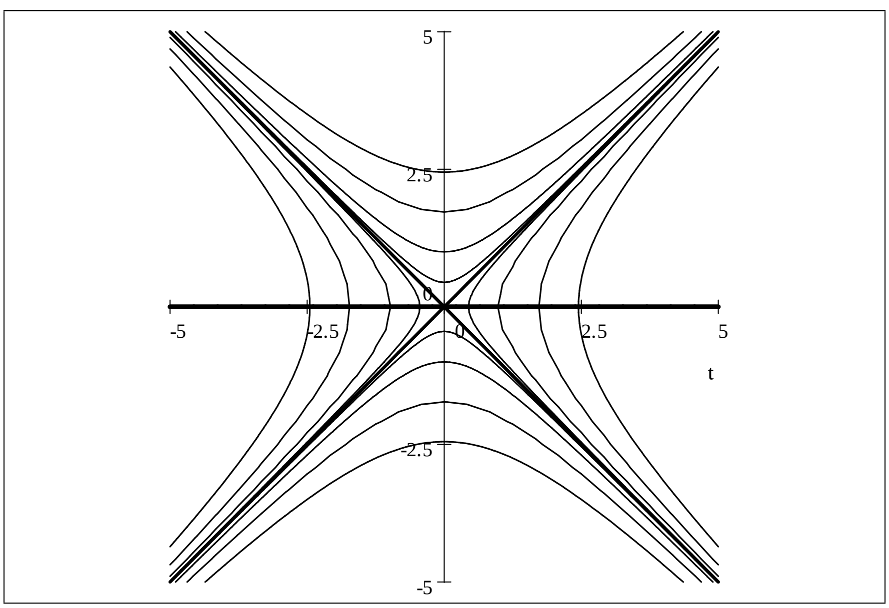
$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}$$

och lös den med att multiplicera båda sidor med y och sedan integrera den med avseende på t:

$$\begin{aligned} y\frac{dy}{dt} &= t \\ \int y\frac{dy}{dt}dt &= \int tdt \\ \int ydy &= \int tdt \\ \frac{y^2}{2} &= \frac{t^2}{2} + C \end{aligned}$$

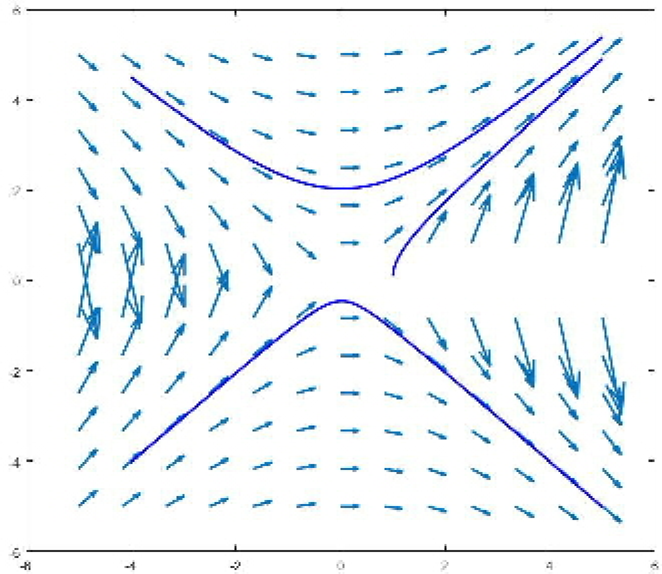
Vi får lösning på implicit form som en familj av kurvor beroende på godtyckliga konstanten C. Dessa kurvor är hyperbler

$y^2 - x^2 = C$



I varje punkt (t, y) på dessa kurvor är lutningen lika med $\left(\frac{t}{y}\right)$ .Lägg märke till att ekvationen är odefinierad på för $y = 0$ - på t - axeln. Det är inte helt oskuldig procedur att multiplicera en ekvation med ett uttryck som y som kan vara noll i flera punkter (på hela t - axeln i det fallet). Detta kan ge extra lösningar som ursprunglig ekvation inte har (punkterna på t - axeln i vårt fall).

Riktningsfältet ser ut som på följande bild



Lösningskurvor $y(t)$ som går ovanför linjen $y = |x|$ och under linjen $y = -|x|$ existerar för alla reella värden av tiden t. De lösningskurvor som går mellan dessa två linjer är definierade bara på tidsintervall begränsade uppifrån: $(-\infty, -a)$ eller nerifrån: (a, ∞), med något $a > 0$. Observera några typiska lösningskurvor på bilden.

Vi kommer att betrakta en typ av differentialekvationer av första ordningen som kan lösas analytiskt med hjälp av en liknande idee (i fall primitiva funktioner som dyker upp kan beräknas).

Ordinära differentialekvationer med separabla variabler.

Definition.

Differentialekvationer på formen

$$\frac{dy}{dt} = f(t)g(y)$$

kallas **ekvationer med separabla variabler.** Deras lösning kan reduceras till beräkning av två primitiva funktioner. Dela ekvationen med $g(y)$

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dt} = f(t)$$

beräkna primitiv funktion av vänster och högerled:

$$\int \frac{1}{g(y)}\left(\frac{dy}{dt}\right) dt = \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt$$

om primitiva funktioner i vänster och höger kan beräknas, så får vi en implicit lösning till differentialekvationen på formen

$$W(y) = F(t) + C$$

där

$$W(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy; \qquad F(t) = \int f(t) dt.$$

Det är inte alltid lät och ibland omöjligt att lösa ut y som funktion av t från den ekvationen även om man lyckades beräkna primitiva funktioner.

Exempel (Ex. 2 , sid. 451 i Adams)

Lös följande begynnelsevärdesproblem

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= t^2 y^3 \\ y(1) &= 3 \end{aligned}$$

Ekvationen har separable variabler. Vi löser den med hjälp av samma idee som ovan.

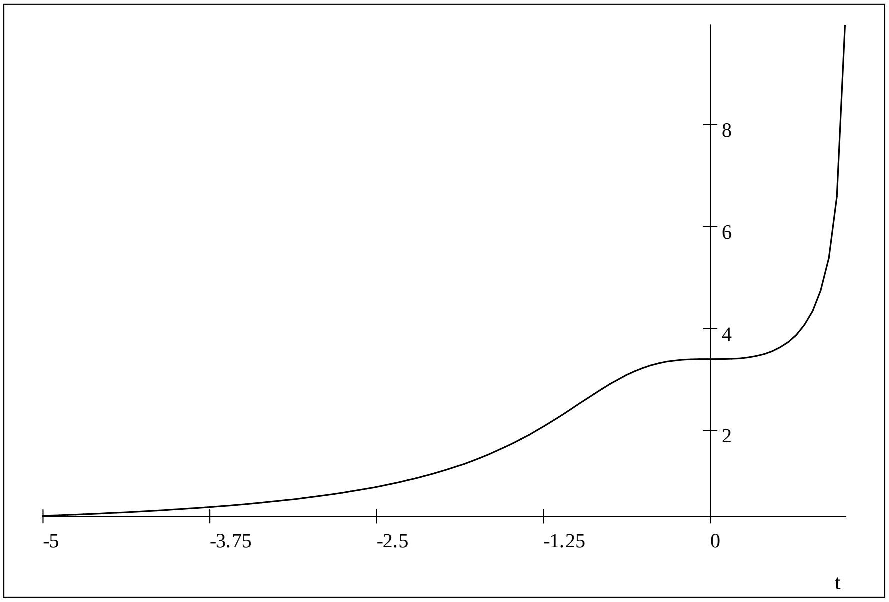
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^3} dy &= \int t^2 dt \\ -\frac{1}{2y^2} &= \frac{t^3}{3} + C \end{aligned}$$

För att bestämma värdet av konstanten C användes begynnelsevillkor.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\,(3)^2} &= \frac{1^3}{3} + C \\ C &= \frac{1}{18} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{18} \end{aligned}$$

Vi sätter in konstanten i implicita ekvationen för y och löser ut y som funktione av t.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2y^2} &= \frac{t^3}{3} - \frac{7}{18} \\ -\frac{1}{2y^2} &= \frac{6t^3 - 7}{18} \\ \frac{1}{y^2} &= \frac{7 - 6t^3}{9} \\ y^2 &= \frac{9}{7 - 6t^3} \\ y &= \frac{9}{\sqrt{7 - 6t^3}} \end{aligned}$$



Bara positiva roten av y^2 satisfierar begynnelsevillkoret $y(1) = 3$.

Vi observerar att lösningen existerar bara för $t < (7/6)^{1/3}$. Den går mot oändligheten då $t \to (7/6)^{1/3}$ från vänster. Det är typiskt för ekvationer där högerledet växer snabbare än linjärt i y variabeln (vi hade y^3 i högerledet i det fallet).

Exempel (Ex. 5, sid. 453 i adams)

I en kemisk reaktion mellan två molekuler av reaktanter A och B skapas en molekul av produkt C. Enligt massverkans lag pågår reaktionen med farten som är proportionell mot produkten av koncentrationer av A och B. Om från början fanns a (mol/cm^3) av A och b (mol/cm^3) av B, beteknas koncentrationen av C vid tiden t med $x(t)/(mol/cm^3)$. Produktens koncentratione $x(t)$ kommer att satisfiera följande differentialekvation och begynnelsevillkor (noll koncentration $x(0)$ av produkt C vid starttiden $t = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k(a-x)(b-x) \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

Vi kommer att lösa den ekvationen vid förutsättning att $b \neq a$. Ekvationen är ODE med separabla variabler och löses med hjälp av samma idee som i tidigare exempel.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a-x)(b-x)}\frac{dx}{dt} &= k \\ \int \frac{1}{(a-x)(b-x)}\left(\frac{dx}{dt}\right)dt &= k\int dt = kt + C \\ \int \frac{1}{(a-x)(b-x)}dx &= k\int dt = kt + C \qquad (2) \end{aligned}$$

Vi förutsättar att $a \neq b$ och genomför partiellbråkuppdelning i integralen i vänster så att det uppstår bara tabellintegraler:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(a-x)(b-x)} &= \frac{A}{a-x}+\frac{B}{b-x}=\frac{Ab-Ax+Ba-Bx}{(a-x)(b-x)}\\
A+B &= 0; \qquad Ab+Ba=1\\
B &= -A; \qquad A(b-a)=1\\
A &= 1/(b-a); \quad B=-1/(b-a)\\
\frac{1}{(a-x)(b-x)} &= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a-x}-\frac{1}{b-x}\right)
\end{aligned}$$

På grund av att $x \le a$, $x \le b$, ger integrationen

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(a-x)(b-x)}dx &= \frac{1}{b-a}\left(-\ln(a-x)+\ln(b-x)\right)=kt+C\\
\ln\left(\frac{b-x}{a-x}\right) &= (b-a)\,kt+C_1; \qquad C_1 \stackrel{def}{=} (b-a)C
\end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret är $x(0)=0$ d.v.s. ingen produkt i början. Insättningen av $t=0$ och $x=0$ i uttrycket för lösningen ger C_1 värdet

$$C_1=\ln(b/a)$$

och

$$\ln\left(\frac{b-x}{a-x}\right)-\ln(b/a)=(b-a)\,kt+\ln(b/a)$$

Flytta $\ln(b/a)$ mot vänster och använd logarithmens egenskaper:

$$\ln\left(\frac{a\,(b-x)}{b\,(a-x)}\right)=(b-a)kt$$

Beräkna exp av vänster och höger

$$\frac{a\,(b-x)}{b\,(a-x)}=e^{(b-a)kt}$$

Lös ekvationen med avseende på x

$$\begin{aligned}
ab-ax &= (ab-bx)\,e^{(b-a)kt}\\
-x\left(a+be^{(b-a)kt}\right) &= abe^{(b-a)kt}-ab
\end{aligned}$$

Ett analytiskt uttryck för $x(t)$ följer:

$$x(t)=\frac{ab\left(e^{(b-a)kt}-1\right)}{be^{(b-a)kt}-a}$$

■

Linjära ODE av första ordningen

Med linjära ODE av första ordningen menas ekvationer på formen

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

där p och g är givna funktioner som är kontinuerliga på något intervall (a, b). En ekvation kallas icke homogen linjär ODE om $g(t)$ inte är noll konstant. Linjära ekvationen på formen

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0$$

kallas homogen linjär ODE.

Homogen linjär ODE är ekvation med separabla variabler och har lösning på formen

$$y(t) = Ke^{-\mu(t)} \tag{3}$$

där $\mu(t)$ är primitiv funktion till p:

$$\mu(t) = \int p(t)dt$$

Vi visar hur man bevisar detta, men det räcker att memorera lösningens uttryck.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= -p(t)y \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} &= -p(t) \\
\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt &= \int -p(t)dt \\
\int \frac{1}{y}dy &= -\int p(t)dt = -\mu(t) \\
\ln(|y|) &= -\mu(t) + C \\
|y(t)| &= e^{-\mu(t)+C} = Ke^{-\mu(t)}; \quad |K| = e^C > 0
\end{aligned}$$

$$y(t) = Ke^{-\mu(t)} \tag{4}$$

■

Man kan lätt observera att $y(t) = 0$ är också en lösning och kan inkluderas i formeln ovan med $K = 0$.

Metod med integreringsfaktor för inhomogena linjära ODE.

För **inhomogen linjär ekvation** på formen

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \tag{5}$$

uttryckes alla lösningar med hjälp av följande formeln som är också bra att memorera

$$y(t) = e^{-\mu(t)}\left[\int e^{\mu(t)}g(t)dt + C\right] \tag{6}$$

där $\mu(t)$ är samma primitiv funktion till p som ovan:

$$\mu(t) = \int p(t)dt$$

Formeln (6) bevisas med hjälp av metoden som kallas **Metod med integreringsfaktor.**

För att lösa konkreta problem får man använda formeln ovan eller får genomföra metoden med integreringsfaktor på en konkret ekvation. Vi demonstrerar nu metoden med integreringsfaktor i allmän situation.

Bevis till formeln (6)

Vi multiplicerar ekvationen (5) med **integreringsfaktorn**

$$e^{\mu(t)}$$

där $\mu(t) = \int p(t)dt$

$$\left(\frac{dy}{dt} + p(t)y\right) e^{\mu(t)} = g(t)e^{\mu(t)}$$

Produktregeln för derivatan och det faktum att $\mu(t) = \int p(s)ds$ medför följande

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{\mu(t)}y(t)\right) &= y(t)\frac{d}{dt}\left(e^{\mu(t)}\right) + e^{\mu(t)}\frac{d}{dt}\left(y(t)\right) = \\
&= y(t)\left(e^{\mu(t)}\right)\frac{d}{dt}\mu(t) + e^{\mu(t)}\frac{d}{dt}y(t) = \\
&= y(t)e^{\mu(t)}p(t) + e^{\mu(t)}\frac{d}{dt}\left(y(t)\right) = \\
&= e^{\mu(t)}\left(\frac{dy}{dt} + p(t)y\right)
\end{aligned}$$

Sista uttrycket och ekvationen (5) ger att

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\mu(t)}y(t)\right) = e^{\mu(t)}g(t)$$

Den ekvationen löses med att integrera vänster och höger med avseende på t och tillämpa primitiva funktionens definition.

$$e^{\mu(t)}y(t) = \int e^{\mu(t)}g(t)dt + C$$

Multiplikation med $e^{-\mu(t)}$ leder till lösningen på formen (6) ovan.

$$y(t) = e^{-\mu(t)}\left[\int e^{\mu(t)}g(t)dt + C\right] \tag{7}$$

■

Man kan tillägga en godtycklig konstant A till $\mu(t)$ också, och sätta $e^{\mu(t)+A}$ istället, men det ger inga extra nya lösningar jämfört med formen ovan.

Man kan bevisa samma formeln på ett sätt till.

Metoden med variation av parameter för inhomogena linjära ODE.

Med en annan metod för inhomogena linjära ODE av första ordningen sökes lösningar på formen

$$y(t) = k(t)e^{-\mu(t)}$$

med en okänd funktion $k(t)$. Vi sätter den framställningen in i ekvationen och får en enkel ekvation för okända funktionen $k(t)$.

$$\frac{dk}{dt} = e^{\mu(t)}g(t)$$

som löses med integration. Exakt samma uttryck för lösningar följer:

$$\begin{aligned} k(t) &= \int e^{\mu(t)}g(t)dt + C & (8) \\ y(t) &= e^{-\mu(t)}\left[\int e^{\mu(t)}g(t)dt + C\right] \end{aligned}$$

Begynnelsevärdesproblem för linjära ODE av första ordningen

Det är lämpligt att direkt få fram ett uttryck för att lösa ett begynnelsevärdesproblem för linjära ODE av första ordningen.

Vi gör detta först för homogena ekvationen

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + p(t)y &= 0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Lösningen uttryckes av följande formel:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 \exp\left(\mu(t_0) - \mu(t)\right) & (9) \\ \mu(t) &= \int p(t)dt & (10) \end{aligned}$$

eller ett ekvivalent (enligt Newton-Leibnitz) uttryck:

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right) \qquad (11)$$

För inhomogena ekvationen löses begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + p(t)y &= g(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

med hjälp av följande formel:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 \exp(\mu(t_0) - \mu(t)) + \int_{t_0}^{t} g(s)\exp(\mu(s) - \mu(t))ds & (12) \\ \mu(t) &= \int p(t)dt & (13) \end{aligned}$$

eller en variant där $\exp(\mu(t_0) - \mu(t))$ multiplicerar hela uttrycket:

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp(\mu(t_0) - \mu(t)) \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} g(s) \exp(\mu(s) - \mu(t_0)) ds \right] \qquad (14a) \\ &= e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} g(s) e^{\int_{t_0}^{s} p(u)du} ds \right] \end{aligned}$$

Det är lätt att se att insättningen av $t = t_0$ i båda formler ger $y(t_0) = y_0$, d.v.s de uppfyller begynnelsevillkoret.

Exempel.

Linjär inhomogen ODE av första ordningen med konstant koefficient p.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + py &= g(t) \\ y(t_0) &= y_0 \\ y(t) &= y_0 \exp(-p\,(t - t_0)) + \int_{t_0}^{t} g(s) \exp(-p(t-s)) ds \end{aligned}$$

Exempel.

Lös följande begynnelsevärdesproblem

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{t} y &= 3t, \qquad t > 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

Vi använder allmänna formeln

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

$$y(t) = e^{-\mu(t)} \left[\int e^{\mu(t)} g(t) dt + C \right] \qquad (15)$$

med $\mu(t) = \int p(t)dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln t$.

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\ln(t)} \left[\int e^{\ln(t)} (3t) dt + C \right] = \frac{1}{t} \left(\int 3t^2 dt + C \right) = \\ & \frac{1}{t}(t^3 + C) \end{aligned}$$

Med att sätta lösningen med okända konstanten in begynnelsevilkoret får vi fram värdet av konstanten C.

$$\begin{aligned} y(1) &= 1 = \frac{1}{1}(1 + C) \\ C &= 0 \\ y(t) &= t^2 \end{aligned}$$

Exempel.
Lös begynnelsevärdesproblem:

$$\begin{aligned} y' - y\tan(t) &= \frac{1}{\cos(t)}; \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Lösning.
Ekvationen är linjär ODE av första ordningen på formen $y' + p(t)y = g(t)$ med begynnelsevillkor $y(t_0) = y_0$.

$$p(t) = -\tan(t), \quad g(t) = 1/\cos(t), \quad y(t_0) = 0.$$

Den löses med hjälp av formeln:

$$\exp(\mu(t_0) - \mu(t)) \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} g(s) \exp(\mu(s) - \mu(t_0)) ds \right]$$

$$y(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(z)dz \right) \left(y(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(u) \exp\left(\int_{t_0}^{s} p(z)dz \right) ds \right)$$

$$\mu(t) - \mu(t_0) = \int_{t_0}^{t} p(z)dz = \int_{0}^{t} -\tan(z)dz = \ln(\cos t) - \ln(\cos 0) = \ln(\cos t)$$

$$\exp(\mu(t_0) - \mu(t)) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds \right) = \exp(-\ln(\cos t)) = \frac{1}{\cos(t)}$$

$$\int_{t_0}^{t} g(s) \exp(\mu(s) - \mu(t)) ds = \int_{0}^{t} g(s) \exp\left(\int_{0}^{s} p(z)dz \right) ds = \int_{0}^{t} \frac{1}{\cos(z)} \exp(\ln(\cos z)) dz = \int_{0}^{t} du = t$$

Svar:

$$y(x) = \frac{t}{\cos(t)}$$

■

Exempel.
Lös begynnelsevärdesproblem

$$\begin{aligned} y' - y &= \sin(t) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Lösning. Det är linjär ekvation på formen

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + py &= g(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

och lösningen ges av allmänna formen:

$$y(t) = y_0 \exp(-p\,(t - t_0)) + \int_{t_0}^{t} g(s) \exp(-p(t-s))ds$$

Parametrar i vårt problem är $p = -1$, $g(t) = \sin(t), t_0 = 0$, $y_0 = 1$.
Lösningen till begynnelsevärdesproblemet ges av

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp(t) + \int_0^t \sin(s) \exp(t-s)ds = \\ &= \exp(t) + \exp(t) \int_0^t \sin(s) \exp(-s)ds \end{aligned}$$

Vi behöver bara beräkna integralen $\int_{t_0}^{t} \sin(s) \exp(-s)ds$ och börjar med att beräkna primitiva funktionen. Sådana integraler beräknas med hjälp av två partiella integrationer som leder till summan av en funktion och samma integral som innan med koefficient -1. Integralen löses ut från den ekvationen och man får primitiva funktionen.

$$\begin{aligned} I(s) &= \int e^{-s} \sin(s)ds = -\sin(s)\, e^{-s} + \int \cos(s)\, e^{-s}\, ds = \\ &= -\sin(s)\, e^{-s} - \cos(s)\, e^{-s} - \int \sin(s)\, e^{-s}\, ds = -\sin(s)\, e^{-s} - \cos(s)\, e^{-s} - I \\ 2I(s) &= -\sin(s)\, e^{-s} - \cos(s)\, e^{-s} \end{aligned}$$

$$I(s) = \int e^{-s} \sin(s)ds = -e^{-s} \frac{(\sin(s) + \cos(s))}{2}$$

Nu kan bestämda integralen i uttrycket för lösningen beräknas:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin(s) \exp(t-s)ds &= \left[-e^{t-s} \frac{(\sin(s) + \cos(s))}{2} \right] \Bigg|_{s=0}^{t} \\ &= \left[-\frac{(\sin(t) + \cos(t))}{2} \right] + \frac{1}{2} e^t \end{aligned}$$

$$y(t) = \exp(t) + \left[-\frac{(\sin(t) + \cos(t))}{2} \right] + \frac{1}{2} e^t$$