Stora bilden av Linjära algebran. Vektorrum, linjära transformationer, matriser (sammanfattning av begrepp)

Linjär algebra består av tre grenar eller koncept: geometriska begreppet av vektorrum, analysbegreppet linjär transformation och algebraiska toolboxet med matrisberäkningar. Linjära ekvationssystem förenar alla tre grenar.

Vektorrum

Definitionen av ett vektorrum,

Vektorrum är en mängd $\mathcal{H}$ med två operationer - addition $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ och multiplikation med skalärer $c\mathbf{u}$, definierade för alla dess element $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$ (vektorer) så att $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathcal{H}$, $c\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ så att addition och multiplikation med skalärer satisfierar följande algebraiska egenskaper

Algebraiska egenskaper hos vektorrum $\mathbb{R}^n$

i)$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$	v) $c(\mathbf{u}+v)=c\mathbf{u}+cv$
ii) $(\mathbf{u}+v)+w=\mathbf{u}+(v+w)$	vi) $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$
iii) $\mathbf{u}+0=0+\mathbf{u}=\mathbf{u}$	vii) $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$
iv) $\mathbf{u}+(-1)\mathbf{u}=\mathbf{u}-\mathbf{u}=0$	viii) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

$\square$

$\mathbb{R}^n$ är ett av vanligaste exempel på vektorrum.

Linjära transformationer

Definitionen av en transformation (eller avbildning)

Man säger att T är en transformation , eller avbildning som verkar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$och skriver $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ om det är en regel som till varje vektor $\mathbf{x}$ ur $\mathbb{R}^n$ ordnar en vektor ur $\mathbb{R}^m$ som betecknas med $T(\mathbf{x})$.

Den definitionen är bra att komma ihåg när man skriver en egen funktion eller funktionshandtag i Matlab!

Definitionen av linjär transformation

Transformationen T är en linjär transformation från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$($T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$) om den uppfyller två villkor som gäller för godtyckliga $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ur $\mathbb{R}^n$ och ett godtyckligt reelt tal c:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= T(\mathbf{x})+T(\mathbf{y}) \\ T(c\mathbf{x}) &= cT(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Matristransformation

Låt A vara en $m\times n$ matris. Betrakta nu en **transformation (**eller en **avbildning)** T, som transformerar vektorer x ur $\mathbb{R}^n$ i vektorer ur $\mathbb{R}^m$enligt formeln

$$T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$$

Den **matristransformationen** är en **linjär** transformation, eftersom matris-vektorprodukt uppfyller linjäritetsvillkor ovan. Kom ihåg här att $A\mathbf{x}$ är per definition en linjär kombination av kolonner ur A med koefficienter ur $\mathbf{x}$: $A\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_n\mathbf{a}_n$ Linjäriteten av den transformationen följer direkt från räkneregler för vektorer ur vektorrummet $\mathbb{R}^m$.

$\square$

Analysen av sammansatta matristransformationer ledde till definitionen av matrisprodukt.

Matrisalgebra

Matrisaddition och multiplikation med tal

$$\begin{aligned} (A+B)_{ij} &= A_{ij} + B_{ij} \\ (cA)_{ij} &= cA_{ij} \end{aligned}$$

Matrisprodukt

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + ... + A_{in}B_{nj}$$

för matriser A av storlek $m \times n$ och B av storlek $n \times p$. Resultatet AB av den matrismultiplikationen har storlek $m \times p$.

Sammansatta linjära matristransformationer $A(B\mathbf{x})$ är en matristransformation med matrisen AB.

$$A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$$

Matrisprodukten är icke kommutativ:

$$AB \neq BA$$

Matrisalgebrans egenskaper.

$$\begin{aligned} a) \quad A(BC) &= (AB)C \\ b) \quad A(B+C) &= AB + AC \\ c) \quad (B+C)A &= BA + CA \\ d) \quad r(AB) &= (rA)B = A(rB) \\ e) \quad I_mA &= A = AI_n \end{aligned}$$

Linjärt beroende, linjärt oberoende uppsättningar vektorer.

Från ekvationer $\Longrightarrow$ till geometri

Vi observerade vid analys av homogena linjära system $A\mathbf{x} = 0$ att de kan ha ara en trivial lösning $\mathbf{x} = 0$ eller kan ha icketriviala lösningar $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. I andra fallet kan lösningsmängden framställas som spannet Span$\{...\}$av en eller flera vektorer som man hittar med hjälp av parametrisk vektor framställning av allmän lösning efter Gausseliminationen på matrisen A.

Lösningsmängden kan vara en rät linje, eller ett plan genom origo. Den kan vara svårt att föreställa sig i fall lösningsvektorer $\mathbf{x}$ är elementen ur $\mathbb{R}^n$ med $n > 3$ (d.v.s antalet kolonner i matrisen A är större än 3).

Från geometri $\Longrightarrow$ till ekvationer.

I flera situationer är det intressant att reda ut hur spannet Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p\}$ av en uppsättning vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ,..., $\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^m$ beror på mera detaljerad information om hur dessa vektorer ligger med avseende på varandra.

Definition

En uppsättning vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p\} \in \mathbb{R}^m$ kallas vara **linjärt oberoende** om vektorekvationen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + ... + x_p\mathbf{v}_p = 0$$

har bara en trivial lösning $\mathbf{x} = 0$.

Definition

En uppsättning vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p\} \in \mathbb{R}^m$ kallas vara **linjärt beroende** om vektorekvationen

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_p\mathbf{v}_p = 0$$

har (åtminstone) en icke trivial lösning $\mathbf{c} \neq 0$. Man kan aternativt säga att det finns reella tal c_1, c_2, ..., c_p inte alla lika med 0 så att ekvationen ovan är uppfylld.

Exempel

Två parallella vektorer i rummet $\mathbb{R}^3$ är linjärt beroende.

Tre vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ och $\mathbf{z}$ med $\mathbf{z} = 2\mathbf{v} - \mathbf{w}$ är linjärt beroende eftersom linjär kombination $-\mathbf{2v} + \mathbf{w} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$ med koefficienter -2,1,1 all nonzero är lika med noll. Med andra ord vektorekvationen

$$c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{w} + c_3\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

har en icketrivial lösning $(-2, 1, 1)$.

Vi kommer att betrakta att exempel där relationer mellan vektorer är inte explicit synliga.

Exempel

Betrakta tre vektorer ur $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

a) Bestäm om vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ är linjärt beroende.

b) Ange om det är möjligt linjärt beroendet mellan dessa vektorer?

Man behöver vestämma om vektorekvationen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = 0$$

har en icketrivial lösning. Vi använder att vektorekvationen är ekvivalnet med ekvationssystemet med matrisen A sådan att kolonnerna är vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$: A=$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$. Genomför

Gausseliminationen på utvidgade matrisen (med noll-högerledet)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Man ser från matrisen på trappstegsform att x_1 och x_2 är basvariabler och x_3 är en fri variabel.Vi kan direkt göra slutsatsen att vektorerna är linjärt beroende eftersom vi kan välja $x_3 = 1 \neq 0$ och det kommer att ge oss en icketrivial lösning oavsätt värdena av x_1 och x_2.

Lösningen framställes genom fria variablen x_3 som $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi får då en icketrivial lösning $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ för $x_3 = 1$. Motsvarande linjärt beroendet av vektorer blir då $2\mathbf{v}_1 + (-1)\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = 0$

■

Följande sats beskriver situationen när det är enkelt att slutföra om vektorer är linjärt beroende.

Sats 1.7.8, sid. 76 i Lay

Om en uppsättning vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p\} \in \mathbb{R}^n$ innehåller mera vektorer än antalet komponent i varje vektorn, d.v.s. $p > n$, då är vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p\}$ linjärt beroende.

Bevis

Låt $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p]$ - matrisen med kolonnerna - $\mathbf{v}$ - vektorer. Matrisen A har storlek $n \times p$ och homogena ekvationen $A\mathbf{x} = 0$. Om $p > n$ så har vi mera kolonner än ader i matrisen. Detta medför att systemet måsta alltid ha tminstone en frivariabel.

Detta medför att systemet har en icketrivial lösning och vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p\}$ är linjärt beroende.

■

Exempel.

Vektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ är linjärt beroende.

Enkelt faktum är at om en uppsättning vektorer innehåller en nollvektor så är vektorerna linjärt beroende. (Sats 9, sid. 76 i Lay)□

Följande sats har en fördel att beviset och själva satsen gäller för vilket som helst vektorrum och använder inte alls $\mathbb{R}^n$s struktur.

Sats 1.7.7, sid. 75 i Lay (Huvudkriteriet för linjärt beroende vektorer)

En uppsättning vektorer $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p\}$ av två eller mera vektorer är linjärt beroende om och endast om åtminstone en vektor ur uppsättningen kan franställas som linjär kombination av de andra vektorer i uppsättningen.

Kommentar. Satsen påstår INTE att varje vektor i uppsättningen kan framställas på det viset, men kanske bara en.□

En ekvivalent omformulering av satsen:

Om $\mathbf{v}_1 \neq 0$, så måste finnas en vektor $\mathbf{v}_j$ ur S sådan att den är en linjär kombination av första $j - 1$ vektorer ur S.

Bevis till huvudkriteriet för linjärt beroende vektorer (krävs inte på tentan).

Bevis av ekvivalensen i direkt riktning $\Longrightarrow$

Låt någon $\mathbf{v}_j$ ur S vara linjär kombination av andra vektorer i S:

$$\mathbf{v}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p} c_k \mathbf{v}_k$$

Subtrahera $\mathbf{v}_j$ från vänster och höger av sista ekvationen.

$$0 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p} c_k \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_j$$

Vi har fått en linjär kombination av vektorer ur S lika med nol, där åtminstone en koefficient vid $\mathbf{v}_j$ är inte noll (lika med -1). Det betyder att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p\}$ ä linjärt beroende per definition.

Bevis av ekvivalensen i motsatt riktning $\Longleftarrow$

Lår vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p\}$ vara linjärt beroende.

Om $\mathbf{v}_1 = 0$ så är den trivial linjär kombination av andra vektorer (med koefficienter noll).

Om $\mathbf{v}_1 \neq 0$ och det finns per definition en combination av reella tal c_1, c_2, ..., c_p inte alla lika med 0 sådan att

$$\sum_{k=1}^{p} c_k \mathbf{v}_k = 0.$$

Låt j vara största index sådan att $c_j \neq 0$ (alla större index k har $c_k = 0$).

$j > 1$ eftersom annars (om $j = 1$) skulle $c_1 \mathbf{v}_1 = 0$ med $\mathbf{v}_1 \neq 0$ sommedför $c_1 = 0$, som är inte sant.

Vi har då att linjära kombinationen ovan kan skrivas om mera explicit:

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + ... + c_j \mathbf{v}_j + 0 \mathbf{v}_{j+1} + ... + 0 \mathbf{v}_p = 0$$

Vi kan då dela sista ekvationen med c_j och uttrycka $\mathbf{v}_j$ som linjär kombination av föregående vektorer ur S:

$$-c_j \mathbf{v}_j = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + ... + c_{j-1} \mathbf{v}_{j-1}$$

$$\mathbf{v}_j = \left(-\frac{c_1}{c_j}\right) \mathbf{v}_1 + \left(-\frac{c_2}{c_j}\right) \mathbf{v}_2 + ... + \left(-\frac{c_{j-1}}{c_j}\right) \mathbf{v}_{j-1}$$

som avslutar beviset.$\blacksquare$

Exempel. Illustrationen till Kommentar till satsen 1.7.7

Betrakta en uppsättning av 4 vektorer ur $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_4$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .Tre första vektorer ligger i x-y planet, tredje vektor har z - komponentet nollskildt. Den uppsättning vektorer är linjärt beroende, men $\mathbf{v}_4$ kan inte framställd som linjär kombination av tre andra vektorer. Varje av andra tre vektorer kan vara representerad som linjär kombination av övriga vektorer, och faktiskt bara två andra som ligger i samma plan, men inte är parallella.

Bra test på teoriförståelse.

PRACTICE PROBLEMS

1. Let $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$, and $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$.
   a. Are the sets $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{z}\}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{z}\}$, and $\{\mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ each linearly independent? Why or why not?
   b. Does the answer to Part (a) imply that $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ is linearly independent?
   c. To determine if $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ is linearly dependent, is it wise to check if, say, $\mathbf{w}$ is a linear combination of $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, and $\mathbf{z}$?
   d. Is $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ linearly dependent?
2. Suppose that $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is a linearly dependent set of vectors in $\mathbb{R}^n$ and $\mathbf{v}_4$ is vector in $\mathbb{R}^n$. Show that $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ is also a linearly dependent set.

Bas i $\mathbb{R}^n$

Definition

En uppsättning vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p\} \in \mathbb{R}^n$ kallas en **bas** i $\mathbb{R}^n$ i fall de spänner upp $\mathbb{R}^n$:

$$(\text{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p\}) = \mathbb{R}^n$$

och är linjärt oberoende.$\square$

Vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p$ kallas i det fallet **basvektorer.**

Viktiga observationer som blir en sats lite senare i kursen.

i) Vi kan direkt lägga märke till att $p \leq n$ annars är vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p\}$ linjärt beroende.

ii) Vi lägger märke till att Sats 1.4.4 medför att p måste vara lika med n, annars kan matrisen $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_p]$ inte ha ett pivoelement i varje rad för att kunna framställa en godtycklig vektor $\mathbf{b}$ ur $\mathbb{R}^n$ linjär kombination $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{b}$.