Underrum till $\mathbb{R}^n$, nollrum, kolonnrum av en matris, rank, bas, koordinater, dimension.

Påminnelse om $\mathbb{R}^n s$ egenskaper:

Algebraiska egenskaper hos $\mathbb{R}^n$

i)$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{U}$	v) $c(\mathbf{u}+v)=c\mathbf{u}+cv$
ii) $(\ \mathbf{u}+v)+w=\mathbf{u}+(v+w)$	vi) $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$
iii) $\mathbf{u}+0=0+\mathbf{u}=\mathbf{u}$	vii) $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$
iv) $\mathbf{u}+(-1)\mathbf{u}=\mathbf{u}-\mathbf{u}=0$	viii) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Dessa egenskaper följer direkt från liknande egenskaper hos reella tal (eller komplexa i fall vi betraktar vektorer ur $\mathbb{C}^n$) och från komponentvis karaktär av dessa beräkningar.

Definitionen av vektrorrum.

Vektorrum (eller linjärt vektorrum) är en mängd $\mathcal{H}$ med två operationer - addition $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ och multiplikation med skalärer $c\mathbf{u}$, definierade för alla dess element $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in\mathcal{H}$ (vektorer) så att $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathcal{H}$, $c\mathbf{u}\in\mathcal{H}$, sådana att addition och multiplikation med skalärer satisfierar algebraiska egenskaper i tabellen ovan.

□

$\mathbb{R}^n$ är det vanligaste exemplet av vektorrum. Andra exempel av vektorrum är lösningsmängder av homogena elvationssystem $A\mathbf{x}=0$.

Nollrum - lösningsmängden till linjära homogena systemet $Ax=0$

Vi betraktar lösningsmängden till homogena ekvationen

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

där A är en $m\times n$ matrix och $\mathbf{x}\in R^n$

Homogena systemet har alltid en noll-lösning $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ som kallas oftast **trivial lösning**. Andra lösningar kallas **icke triviala.**

Definition.

Lösningsmängden till homogena ekvationen $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ är matrisens **nollrum**, och betecknas med $\mathrm{Nol}(A)$.

□

För två lösningar $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ till homogena systemet, d.v.s. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in\mathrm{Nol}(A)$ och en godtycklig konstant c gäller att $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathrm{Nol}(A)$ och $c\mathbf{x}\in\mathrm{Nol}(A)$, eftersom $A\left(\mathbf{x}+\mathbf{y}\right)=0$ och $A\left(c\mathbf{x}\right)=0$.

Detta gör att $\mathrm{Nol}(A)$ är ett linjärt vektorrum. $\mathrm{Nol}(A)$ är en delmängd i $\mathbb{R}^n$, och är i den situationen **ett underrum** i $\mathbb{R}^n$.

□

Definition.

Ett underrum $\mathcal{V}$ i $\mathbb{R}^n$ är en delmängd i $\mathbb{R}^n$ som har tre egenskaper:
a) Nollvektor hör till $\mathcal{V}$.
b) För varje $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ ur $\mathcal{V}$ gäller det att $\mathbf{u}+\mathbf{w} \in \mathcal{V}$.
c) För varje $\mathbf{u}$ ur $\mathcal{V}$ och c ur $\mathbb{R}$ gäller det att $c\mathbf{u} \in \mathcal{V}$.
$\square$

En mera allmän definition av underrum

Lår $\mathcal{H}$ vara ett linjärt rum och $\mathcal{V}$ vara en delmängd i $\mathcal{H}$: $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ sådan att tre egenskaper a), b), c) ovan gäller.

$\mathcal{V}$ är då ett vektorrum själva. $\mathcal{V}$ kallas då ett underrum i $\mathcal{H}$ eftersom $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$.
$\square$

Exempel.

Ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$ är ett underrum.
En rät linje genom origo är ett underrum i $\mathbb{R}^3$.

En beskrivning av nollrum $\mathrm{Nol}(A)$ med framställning på parametrisk vektor form.

Exempel.(sid. 218 i Lay) Ange explicit beskrivning av $\mathrm{Nol}(A)$ som spannet Span $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ...\}$ av några vektorer $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ...$, med hjälp av parametrisk vektorframställning av allmän lösning till homogena systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Gaussian elimination:

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{26}{3} & -\frac{26}{3} \end{bmatrix}$$

$$\overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 \quad -2x_2 \qquad\quad -x_4 \quad 3x_5 & = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_3 \quad 2x_4 \quad -2x_5 & = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = 0 \end{cases}$$

Vi ser att matrisen A har två pivotkolonner: första och tredje, och tre fria variabler: x_2, x_4, x_5.

Vi observerar också att antalet kolonner är summan av antalet pivotkolinner och antalet friavariabler.

Detta gäller för alla matriser!

Allmän lösning till homogena systemet framställes på parametrisk vektor form som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{u}}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_4 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{v}}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_5 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{w}}}{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = x_2\mathbf{u} + x_4\mathbf{v} + x_5\mathbf{w}$$

Svaret: $\mathrm{Nol}(A) = \mathrm{Span}\,\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ ■

Viktig observation!

Lägg märke till att vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i framställningen för $\mathrm{Nol}(A)$ som vi har fått med hjälp av fria variabler från ekvivalenta trappstegsmatrisen **är autiomatiskt linjärt oberoende.**

Man ser det ganska lätt om man tittar på framställningen av allmänna lösningen på parametrisk vektor form. Varje av vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ har ett komponent lika med 1 på positionen som svarar mot dess frivariabel: x_2 för $\mathbf{u}$, x_4 för $\mathbf{v}$, och x_5 för $\mathbf{w}$. Dessutom har alla tre vektorer noll på de positionen som svarar mot "främmande" frivariabler, eftersom reducerade trappstegmatrisen har alltid nollor ovanför varje pivotposition med 1. Till exempel har $\mathbf{v}$ noll på positioner för x_2 och x_5 eftersom dess "egna" positionen är x_4.

Denna observation gäller för vilken reducerade trappstegmatrisen som helst.

Metoden som användes i exemplet låter framställa allmänna lösningar till alla homogena ekvationer $A\mathbf{x} = 0$ på parametrisk vektor form och samtidigt ger en uppsättning vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p\}$ som är **linjärt oberoende och spänner upp** nollrummet $\mathrm{Nol}(A)$:

$$\mathrm{Nol}(A) = \mathrm{Span}\,(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p)$$

Man säger då att uppsättningen vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p\}$ utgör **en bas** till $\mathrm{Nol}(A)$.

□

Lägg märke till att antalet vektorer i den basen till $\mathrm{Nol}(A)$ som vi hittade, är lika med antalet fria variabler.

□

Bas till ett vektorrum eller ett underrum

Definition.

Låt $\mathcal{V}$ vara ett underrum i ett vektorrum $\mathcal{H}$ (kanske hela $\mathcal{H}$, till exempel $\mathbb{R}^n$). En uppsättning vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p\} \in \mathcal{V}$ **är bas** till $\mathcal{V}$ om vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p\}$ är linjärt oberoende och spänner $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} = \mathrm{Span}\,(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p)$$

□

Kommentar till exemplet med nollrum.

Vektorer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ utgör en bas till $\mathrm{Nol}(A)$

med $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

Exempel.

Kolonnerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ i enhetsmatrisen I_n utgör en **standart bas** i $\mathbb{R}^n$. De spänner $\mathbb{R}^n$ eftersom vilken som helst vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ framställes som $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n$ och är självklart linjärt oberoende.

□

Kolonnrummet av en matris

Definition.

Betrakta kolonnvektorer i en $m \times n$ matris $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n]$.

Spannet av kolonner i A Span $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\} = \mathrm{Col}(A)$ kallas **kolonnrummet** av A.

Det består av alla linjära kombinationer av kolonnerna i A.

□

Observera att $\mathrm{Col}(A)$ är ett underrum i $\mathbb{R}^m$(Sats 4.2.3 i Lay)

Bevis.

Betrakta $\mathbf{u} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... x_n\mathbf{a}_n$ och $\mathbf{w} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + ... y_n\mathbf{a}_n$ som är två godtyckliga linjära kombinationer ur Span $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\}$ och ett godtyckligt tal $C \in \mathbb{R}$.

Vi får då att $\mathbf{u} + \mathbf{w} = (x_1 + y_1)\,\mathbf{a}_1 + (x_2 + y_2)\,\mathbf{a}_2 + ... (x_n + y_n)\,\mathbf{a}_n$ och $\mathbf{u} = (Cx_1)\,\mathbf{a}_1 + (Cx_2)\,\mathbf{a}_2 + ... (Cx_n)\,\mathbf{a}_n$ är också linjära kombinationer ur Span $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\}$. Nollvektorn hör till Span $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\}$ och svarar mot linjära kombinationen med alla koefficienter lika med noll.

■

Exemplet med kolonnrummet kan omedelbart generaliseras. För en godtycklig uppsättning vektorer $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_p\}$ ur $\mathbb{R}^m$ är spannet Span $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_p\}$ ett underrum i $\mathbb{R}^m$. Det kan bevisas exakt likadant som för kolonnrummet.

Vi kan naturligtvist skapa en $m \times p$ matris $B = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_p]$ där dessa vektorer blir kolonner och säga att $\mathrm{Col}(B) = \mathrm{Span}\,\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_p\}$.

Den konstruktionen är lämplig i fall vi vill undersöka olika frågor om den uppsättningen vektorer med hjälp av Gausselimination, analys av pivotpositioner och fri variabler.

Kolonner i en $m \times n$ matris $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n]$ behöver inte vara linjärt oberoende, speciellt om $n > m$, kan de inte vara linjärt oberoende.

Exempel. (Ex. 7, sid. 167 i Lay)

Betrakta matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5]$

Det är uppenbart att alla kolonnerna i B kan framställas som linjär kombination av $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_5$ eftersom fjärde raden består bara av nollor och tre kolonnvektorer $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_5$ är olika kolonner:

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ från enhetsmatrisen I_4. Detta medför dessutom att $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_5$ är linjärt oberoende. Detta gör att $\mathbf{b}_1$,$\mathbf{b}_2$,$\mathbf{b}_5$ utgör en bas i kolonnrummet $\mathrm{Col}(B)$ för B.

Vi kan dessutom få fram explicita framställningar av $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ som linjära kombinationer av $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ ($\mathbf{b}_5$ behövs inte just i det fallet).

$$\mathbf{b}_3 = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2; \quad \mathbf{b}_4 = 5\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2;$$

Vi kan generalisera resultatet i exemplet genom att lägga märke till att matrisen B i exemplet är reducerad trappstegsmatris.

Viktig observation!

Samma typ av egenskaper kommer att gälla för vilken $m \times n$ reducerad trappstegsmatris som helst. Dess pivotkolonner är **alltid olika kolonner från en enhetsmatris** I_m.

Detta medför en **viktig slutsats.**

Pivokolonner i en reducerad trappstegsmatris är alltid linjärt oberoende och utgör bas till kolonnrummet.

Vi kommer att observera lite senare att pivokolonner i en godtycklig matris är alltid linjärt oberoende och utgör bas till kolonnrummet.

□

Exempel. (Example 8, sid. 168 i Lay)

Bestäm en bas till kolonnrummet Col(A) av matrisen A (det finns alltid oändligt många).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 11 & -8 \end{bmatrix}$$

Man kan testa att matrisen A är radekvivalent med matrisen B från föregående exemplet.

Vi startar lösningen med lite allmänna resonemang.

Frågan om en uppsättning vektorer $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\}$ är linjärt beroende löses genom att hitta icketriviala lösningar till homogena vektorekvationen

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_n\mathbf{a}_n = 0$$

som är samma som matrisekvationen

$$A\mathbf{x} = 0$$

Frågan om en uppsättning vektorer $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n\}$ är linjärt beroende löses genom att hitta icketriviala lösningar till homogena vektorekvationen

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + ... + x_n\mathbf{b}_n = 0$$

som är samma som matrisekvationen

$$B\mathbf{x} = 0$$

För två radekvivalenta matriser A och B har två motsvarande homogena ekvationssystem samma lösningsmängd. Detta gör att linjära kombinationer av två uppsättningar av pivotkolonner från A och från B med samma koefficienter kan vara lika med noll bara samtidigt.

För reducerade trappstegsmatrisen B vet vi att pivot kolonner är linjärt oberoende, d.v.s. en linjär kombination av pivot kolonner ur B är noll bara för nollkoefficienter.

För exemplet vi betraktade betyder detta att

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_5\mathbf{b}_5 = 0$$

om och endast om $x_1 = x_2 = x_5 = 0$.

För radekvivalenta matrisen A i andra exemplet gäller samma egenskap:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_5\mathbf{a}_5 = 0$$

om och endast om $x_1 = x_2 = x_5 = 0$. d.v.s pivotkolonner i A är också linjärt oberoende.

Ovriga kolonner $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$ ur B, som svarar mot positioner av fria variabler, var framställda som linjär kombination av pivotkolonner av B:

$$\mathbf{b}_3 = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2; \quad \mathbf{b}_4 = 5\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2;$$

Exakt samma relationer måste gälla för kolonner $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ från radekvivalenta matrisen A:

$$\mathbf{a}_3 = -3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2; \quad \mathbf{a}_4 = 5\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2;$$

eftersom ekvationer $A\mathbf{x} = 0$ och $B\mathbf{x} = 0$ har samma lösningar. Relationer för $\mathbf{a}_3$ och $\mathbf{a}_4$ svarar mot lösningar $[-3, 2, -1, 0, 0]^T$ och $[5, -1, 0, -1, 0]^T$ till ekvationen $A\mathbf{x} = 0$.

Detta gör att alla linjära kombinationer av kolonner $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ kan framställas som linjära kombinationer av bara $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, och $\mathbf{a}_5$.

Den slutsatsen medför att pivotkolonner $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$ utgör en bas till $\mathrm{Col}(A)$ eftersom $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$ är linjärt oberoende och $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\} = \mathrm{Col}(A)$.

■

Var försiktig och kom ihåg att det är pivotkolonner från A som utgör basen till dess kolonnrum $\mathrm{Col}(A)$, INTE pivotkolonner från radekvivalenta reducerade trappstegsmatrisen B. Pivot kolonnern ur B även inte ligger i $\mathrm{Col}(A)$!!!

□

Samma resonemang skulle gälla för vilken matris som helst och leder till följande sats.

Sats om basen till kolonnrummet av en matris. (Satsen 4.3.6., sid. 230 i Lay)

Pivot kolonner i en matris A utgör en bas till kolonnrummet $\mathrm{Col}(A)$.

□

Var försiktig och kom ihåg att det är pivotkolonner från A som utgör basen till dess kolonnrum $Col(A)$, INTE pivotkolonner från radekvivalenta reducerade trappstegsmatrisen B. Pivot kolonnern ur B behöver även inte ligga i $Col(A)$!!!

□

Vi lägger märke till att det är mycket lättare att hitta en bas till $\mathrm{Col}(A)$ då man behöver bara radreducera A till en trappstegsmatris och hitta pivotkolonner i A.

För att hitta en bas till $\mathrm{Nul}(A)$, måste man först göra det samma och sedan framställa lösningen till homogena systemet $A\mathbf{x} = 0$ på parametrisk vektor form.

Kom ihåg att bas till ett underrum är inte entydig. Man kan få olika svar beroende på hur man framställer underrummet.

Bas, koordinater, dimension

Sats. (formuleras först i texten på sid. 173, och sedan formellt i Theorem 4.5.10, sid. 244 i Lay)

Alla baser till ett underrum $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ har samma antal vektorer (dimensionen av underrummet $\mathcal{V}$).

□

Beviset saknas section 2.9 i Lay och föreslås som Exercises 27, 28, sid. 177 med tydliga tips om resonemanget.

Definition.

Dimensionen av ett underrum $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ är antalet vektorer i dess bas. Om $\mathcal{V} = \{0\}$ är per definition $\dim(\mathcal{V}) = 0$.

□

Definition.

Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n\}$ vara en bas till ett underrum $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ eller annat vektorrum. För varje vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ finns en entydig framställning av $\mathbf{x}$ som linjär kombination av $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n\}$:

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + ... + c_n\mathbf{b}_n$$

med skalärer c_1,c_2,..., c_n som kallas **koordinater av x** med avseende på basen $\mathcal{B}$.Vektorn $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix}$ är en $\mathcal{B}$ - **koordinatvektor** av $\mathbf{x}$ med avseende på basen $\mathcal{B}$.

□

Exempel.

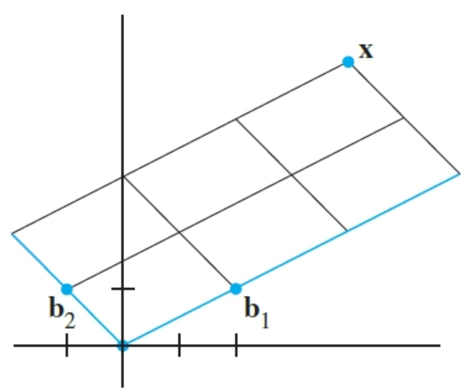

FIGURE 4

The $\mathcal{B}$-coordinate vector of $\mathbf{x}$ is $(3, 2)$.

EXAMPLE 1 Let $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$, and $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Then $\mathcal{B}$ is a basis for $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ because $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ are linearly independent. Determine if $\mathbf{x}$ is in H, and if it is, find the coordinate vector of $\mathbf{x}$ relative to $\mathcal{B}$.

SOLUTION If $\mathbf{x}$ is in H, then the following vector equation is consistent:

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

The scalars c_1 and c_2, if they exist, are the $\mathcal{B}$-coordinates of $\mathbf{x}$. Row operations show that

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Thus $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, and $[\,\mathbf{x}\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. The basis $\mathcal{B}$ determines a "coordinate system" on H, which can be visualized by the grid shown in Figure 1. ■

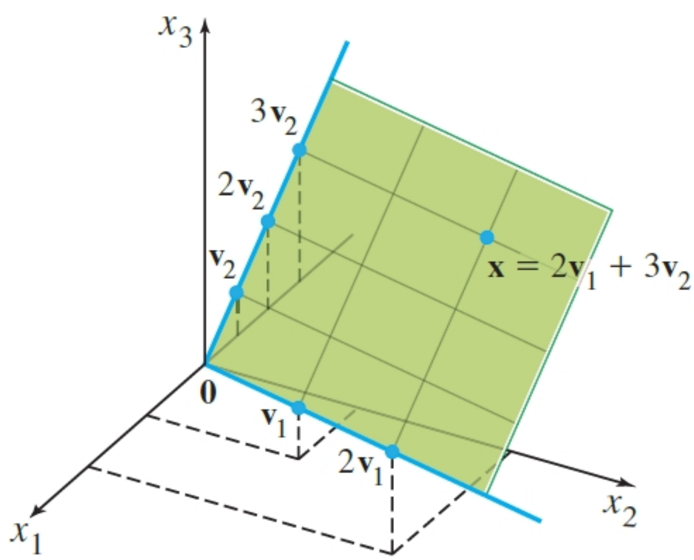

FIGURE 1 A coordinate system on a plane H in $\mathbb{R}^3$.

Ranksatsen

Vi börjar med en enkel observation om pivotkolonner och fria variabler i en matris.

För en $m \times n$ matris A antalet pivotkolonner plus antalet fria variabler är lika med antalet kolonner i A. Vi kan formulera om detta påstående på annat sätt: antalet vektorer i basen till $\text{Col}(A)$ (som är dimensionen av $\text{Col}(A)$ och antalet vektorer i basen till $\text{Nul}(A)$ som är dimensionen av $\text{Nul}(A)$, har summan lika med n - antalet kolonner i A:

$$\dim(\text{Col}(A)) + \dim(\text{Nul}(A)) = n$$

Definition.
Rank av matris A: $\operatorname{rank}(A)$ är dimensionen av kolonnrummet $\operatorname{Col}(A)$ av A.
$\square$
Vi kan formulera om tidigare observationer och den definitionen som
Ranksatsen. Sats 2.9.14.
För en matris A gäller att

$$\operatorname{rank}(A) + \dim\left(\operatorname{Nul}(A)\right) = n$$

$\square$

EXAMPLE 3 Determine the rank of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

SOLUTION Reduce A to echelon form:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & -6 & 4 & 14 & -20 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Pivot columns} \end{array}$$

The matrix A has 3 pivot columns, so rank $A = 3$.

Vi kan nu tillägga lite extra påståenden ekvivalenta med inverterbarheten av en kvadratisk $n \times n$ matris A.

Sats om rank och inverterbara matriser.

(Fortsättningen av satsen om inverterbara matriser. Sats utan nummer i Lay sid. 174.)

Låt A vara en $n \times n$ matris. Följande påståenden är ekvivalenta med att matrisen A är inverterbar.

m. Kolonner i A utgör en bas i $\mathbb{R}^n$.

n. $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^n$

o. $\dim(\text{Col}(A)) = n$

p. $\text{rank}(A) = n$

q. $\text{Nul}(A) = \{0\}$

r. $\dim(\text{Nul}(A)) = 0$

□

Bevis till satsen består av flera enkla steg, som kan vara bra övningar, men krävs inte på tentan. Men man måste kunna formulera 5-6 stycken av dessa ekvivalenta påståenden (från a. till r.) från satsen.

Praktisk användning av resultat och metoder från den föreläsningen är baserad på Gausselimination och radredusering av en given matris A till en radekvivalent matris på trappstegsform eller reducerad matris på trappstegsform. Det är möjligt att göra det på papper bara för små matriser upp till 4×4. För större matriser gör man detta bara med hjälp av dator.