Determinanter, egenvectorer, egenvärden.

Determinanter av kvadratiska matriser definieras recursivt: först för 2×2 matriser, sedan för 3×3 matriser som är mest användbara.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{aligned}
& \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
= \; & a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
= \; & a_{11} \left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \right) - a_{12} \left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} \right) + a_{13} \left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \right) \\
= \; & -a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{32} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} ...etc.
\end{aligned}$$

För matriser av högre storlek $n \times n$ definieras determinat med hjälp av reducering till beräkning av n stycken determinanter av delmatriser av storlem $(n-1) \times (n-1)$.

Definition

För $n \geq 2$ är determinanten av $n \times n$ matrisen $A = [a_{ij}]$ summan av termer på formen $\pm a_{1j} \det A_{1j}$ med alternerande plus och minus, där matrisen $A_{1,j}$ fås från matrisen A med att strycka bort första raden och kolonnen j.

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + ...(-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

$\square$

Lite allmännare variant av den regeln kan formuleras med hjelp av uttrycket som heter **kofaktor:**

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Utveckling över raden i :

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in}$$

Utveckling över kolonn ij:

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + ... + a_{nj}C_{nj}$$

Plus och minus växlar när vi går längs en rad eller längs en kolonn:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & ... \\ - & + & - & ... \\ + & - & + & ... \\ - & + & - & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

Det är förmånligt att välja för utvecklingen en rad eller en kolonn som innehåller flest nollor.

För en triangular matris med nollor under eller ovanför diagonalen, är det A lika med produkt av diagonala element.

Determinantens egenskaper

Satsen om radoperationer. Sats 3.2.3, sid. 187 i Lay

Låt A vara en kvadratisk matris.

a. Om a multiple av en rad adderas till annan dar i A för att skapa en ny matris B, så $\det A = \det B$.

b. Om två rader i A växlar platser för att producera matrisen B, så $\det A = -\det B$.

c. Om en rad i A multipliceras med ett tal c, för att producera matrisen B, så $\det B = c \det A$

Dessa egenskaper kan användas för att få fram en enklare matris och beräkna determinant snabbare.

Samma egenskaper gäller om man genomför liknande transformationer med kolonner i A.

En viktig slutsats (i gul rektangel på sidan 189 i Lay)

Vi kan genomföra Gausselimination på en kvadratisk matris A utan att skala rader (utan att multiplicera dem med ett tal), men kanske med att växla r gånger några rader. Vi får då en trappstegsmatris U som är radekvivalent med matrisen A och är triangulär(!!!).

$\det U$ är lika med produkt av dess diagonala element, och har enkelt samband med determinanten av ursprungliga matrisen A:

$$\det A = (-1)^r \det U$$

där r är lika med antalet vaxlande par rader under Gauss eliminationen. (Tecknet av determinanten ändras varje gång då vi växlar två rader.)

Det kan uppstå två situationer med $\det U$. Triangulära matrisen U han ha n pivotelement, som alla står på diagonalen. I det fallet är $\det U$ lika med produkten av dess pivotelement.

Annars, får man några nollrader i U och några nollelement på diagonalen av U. I det fallet blir $\det U = 0$ och $\det A = 0$.

Se på bilden:

$$U = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

$\det U \neq 0$

$$U = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det U = 0$

Vi får en umedelbar slutsats

Sats 3.2.4 Om determinant och inverterbara matriser.

En kvadratisk matris A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$.

$\square$

Exempel.

Beräkna en determinant med att använda bara regeln a) i satsen om determinantens egenskaper.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$ med att addera första raden till andra och första raden gånger -2 till tredje raden.

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$ med att addera andra raden gånger -2 till tredje och andra raden gånger -1 till fjärde raden.

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$ med att addera tredje raden gånger -2 till fjärde raden.

Alla matriser under transformationen har samma determinant enligt regeln a) i satsen ovan. Sista matrisen är matris på trappstegsform och trianguylär matris.

Dess determinant är lika med produkt av diagonala element. Slutsatsen är att

$$\det A = 1 \times 2 \times (-2) \times 15 = -60$$

■

Sats 3.2.5, sid. 190, i Lay. Om determinant av transponat matris.

$$\det A^T = \det A$$

□

Sats 3.2.6, sid. 191. om determinant av matrisprodukt (extremt icke trivialt resultat!)

Om A och B är två $n \times n$ matriser, så gäller att

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Bevis är komplicerat och krävs inte.

Geometriska meningen med den satsen följer lätt från geometriska meningen med determinanten.

$|\det(A)|$ är volumen som är spännd av kolonnvektorer i A. Vi vet det väl från analytisk geometri i fall med dimensioner 2 och 3. Determinant har samma geometriska meningen i högre dimensioner.

Man tolkar också $\det(A)$ som ändringen av volumen av enhets kub spännd av basvektorer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$, under transformationen $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, eftersom kolonnerna i A är lika med $\mathbf{a}_i = A\mathbf{e}_i = T_A(\mathbf{e}_i)$ (med möjlig multiplikation med -1).

Om vi inför en till transformation $T_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ och betraktar ändringen av volumen av enhetskub under sammansatta transformationen $T_A(T_B(\mathbf{x}))$, så blir den ändringen naturligtvist lika med produkten $\det(A)\det(B)$:

man ändrar volumen först $\det(B)$ gånger och sedan resultatet $\det(A)$ gånger till, d.v.s $\det(A)\det(B)$ sammanlagt (med möjlig multiplikation med -1). Å andra sidan är matrisen av sammansatta transformationen lika med AB.Matris produkten definierades så att det skulle gälla.

Den matrisen AB ändrar volumen som $\det(AB)$ (med möjlig multiplikation med -1). så man måste ha $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

■

Cramer's regel.

Sats 3.3.7, sid. 195

Om $n \times n$ matris A är inverterbar ($\det A \neq 0$) kan komponenter x_i av entydiga lösningen till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ uttryckas som

$$x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A}; \quad i = 1, 2, ..., n$$

Där matrisen $A_i(\mathbf{b})$ fås från matrisen A med att ersätta kolonnen på plats i i m A med vektorn $\mathbf{b}$.

En fördel med den metoden är att man kan beräkna enstaka intressanta komponenter ur lösningen $\mathbf{x}$ utan att beräkna hela lösningen. Den formeln bevisas med att betrakta produkten

$$\begin{aligned} AI_i(\mathbf{x}) &= A[\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{x}, ...\mathbf{e}_n] = [A\mathbf{e}_1, ..., A\mathbf{x}, ...A\mathbf{e}_n] \\ &= [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{b}, ...\mathbf{a}_n] \end{aligned}$$

Med att tillämpa produktregeln för determinanter på vänstra delen i den likheten fås

$$(\det\ A)\,(\det I_i(\mathbf{x})) = \det A_i(\mathbf{b})$$

Andra determinanten är lika med x_i.

$$\det I_i(\mathbf{x}) = x_i$$

Det fås genom kofaktor utveckling over raden i, där det står bara nollor förutom ett diagonalelement x_i på positionen (i, i). Detta medför

$$(\det\ A)\,x_i = \det A_i(\mathbf{b})$$

och Cramers formel.

■

EXAMPLE 1 Use Cramer's rule to solve the system

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 6 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

SOLUTION View the system as $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Using the notation introduced above,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

Since $\det A = 2$, the system has a unique solution. By Cramer's rule,

$$x_1 = \frac{\det A_1(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{24 + 16}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{24 + 30}{2} = 27$$

■

Cramers formula medför omedelbart en ganska oanvändbar formula för inversa matrisen: eftersom (i, j) element $[A^{-1}]_{ij}$ i A^{-1}är enligt Cramers regel

$$[A^{-1}]_{ij} = \frac{\det A_i(\mathbf{e}_j)}{\det A}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

där

$$C_{ji} = \det A_i(\mathbf{e}_j)$$

Det är lätt att se att $C_{ji} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, där matrisen A_{ij} är matrisen A utan kolonn j och rad i.

$\square$

Den formeln är helt opraktisk i alla fall förutom fallet då $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är en 2×2 matris och

$$A^{-1} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

som vi lärde tidigare.

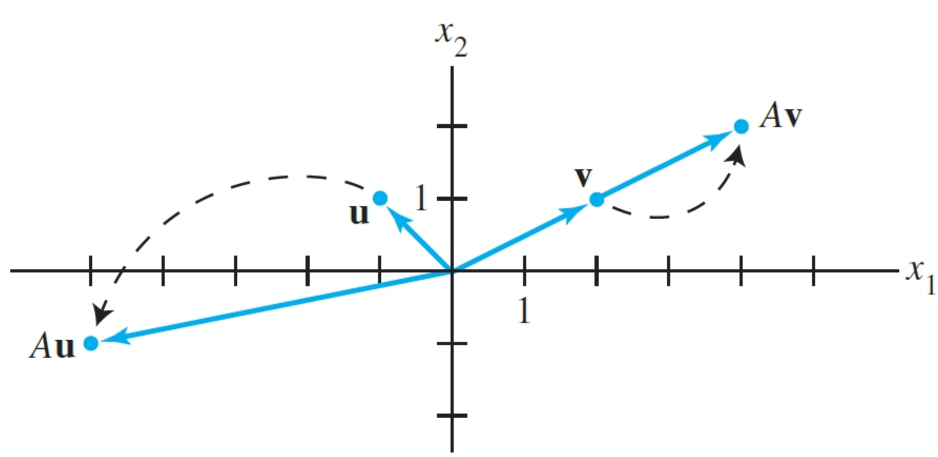
$\square$

Egenvektorer, egenvärden.

Exempel.

Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Bilder av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ under avbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, som verkar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ visas på bilden



Vi observerar att vektorn $\mathbf{v}$ har en väldigt speciell relation med matrisen A, nämligen $A\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$. Avbildningen T definierad av matrisen A bara ändrar längden av vektorer parallella med $\mathbf{v}$ och gör dem dubbelt så långa.

Definition.

Egenvektor till en $n \times n$ matris A är en nollskilld vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sådan att $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ för någon skalär $\lambda \in \mathbb{R}$.

(λ är reellt tal här, men kan vara komplext tal i fall man betraktar komplexa vektorrummet $\mathbb{C}^n$).

□

Man kan formulera om definitionen med betoning på egenvärdet.

Skalären λ kallas egenvärdet till matrisen A om det finns en icke trivial lösning $\mathbf{x} \neq 0$ till ekvationen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Vektorn $\mathbf{x}$ i det fallet är en egenvektor som svarar mot egenvärdet λ.

□

Samma begrepp kan tillämpas för en linjär transformation $T(x)$. Egenvektor till en linjär transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$är en nollskilld vektor $\mathbf{x}$ sådan att $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ för någon skalär λ.

□

Ett tal λ är ett egenvärde till matrisen A om och endast om ekvationen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ har en icke trivial lösning.

□

Exempel.

Visa att skalär 7 är ett egenvärde till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Vi betraktar ekvationen

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= 7\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} &= (7I)\,\mathbf{x} \\ (A - 7I)\,\mathbf{x} &= 0 \\ \left(\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Vi ser att systemet har icketriviala lösningar eftersom två ekvationer är faktiskt samma och det finns en fri variabel. Allmän lösning är

$$\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

Vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor som svarar mot egenvärdet 7. Det finns oändligt många andra parallella egenvektorer som svarar mot $t \neq 0$ i formeln för allmän lösning.

Det är lätt att beräkna alla egenvektorer som svarar mot ett känd egenvärde λ. Man behöver bara hitta allmän lösning till ekvationessystemet

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = 0$$

och framställa den på parametrisk vektor form. Linjärt oberoende vektorer i den framställningen ger maximalt antal linjärt oberoende egenvektorer till matrisen A.

□

Det finns ett speciellt fall då det är enkelt att hitta alla egenvärden till en matris A.

Sats. 5.1.1. sid. 287.

Egenvärden av en triangulär matris är elementen på dess diagonal.

□

Vi hoppar över enkla beviset till den satsen.

Ett homogent system ekvationer $B\mathbf{x} = 0$ har icketriviala lösningar om och endast om $\det B = 0$.Detta medför en viktig ekvation som alla egenvärden måste uppfylla.

Sats (i gul rektangel på sidan 294 i Lay)

A scalär λ är ett egenvärde till en $n \times n$ matris A om och endast om λ satisfierar ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Detta följer från att homogena systemet $(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = 0$ som måste uppfyllas av egenvektorer, har icketriviala lösningar om och endast om $\det(A - \lambda I) = 0$.

Definitionen av karakteristiska polynomet till en matris.

n- te grads polynom

$$\det(A - \lambda I) = p(\lambda)$$

kallas karakteristiska polynomet av matrisen A .

Alla egenvärden till matrisen A är rötter till karakteristiska polynomet.

Algebrans huvudsats.

Algebrans huvudsas påstår att varje n - te grads polynom har n rötter, kanske komplexa, en del möjligen likadana. Likadana rötter kallas **multipla rötter**.

□

Det betyder att varje karakteristiskt polynom $p(\lambda)$ faktoriseras i n linjära termer

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_1\lambda + c_0 \\ &\quad (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

Rötter som träffas mera än en gång i faktoriseringen kallas **multipla rötter,** och egenvärdena kallas i så fall **multipla egenvärden.** Rötter som träffas bara en gång i faktoriseringen kallas **enkla rötter** och motsvarande egenvärden kallas **enkla egenvärden.**

Vi betraktar i kursen nästan bara fallet med reella egenvärden och egenvektorer.

Fallet med komplexa egenvärden och motsvarande komplexa egenvektorer kommer att betraktas som instrument för linjära system ODE lite senare och bara i fall med matriser 2×2.

Definition

Ekvationen

$$p(\lambda) = 0$$

för rötter av karakteristiska polynomet kallas **karakteristiska ekvationen.**

□

Karakteristiska ekvationen har en intressant egenskap (Cayley Hamilton satsen) att matrisen A uppfyller karakteristiska ekvationen:

$$p(A) = 0$$

(Beviset är svårt och ligger utanför kursens ambitioner)

□

Lämplig egenskap hos karakteristiska polynomet i relation med spåret och determinanten av matris.

Det är lätt att observera att två koefficienter i karakteristiska polynomet av grad n

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \\ & \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_1\lambda + c_0 \\ & (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

har speciell mening:

$$c_{n-1} = \mathrm{Tr}(A); \qquad c_0 = p(0) = \det(A)$$

där $\mathrm{Tr}(A)$ är **spåret av A: summan av diagonala element** i A och $p(0) = \det(A)$ är lika med produkten av alla egenvärden.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A) &= a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} \\ \det(A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n \end{aligned}$$

□

Exempel. Betrakta en allmän 2×2 matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och bestäm dess karakteristiska polynom.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\right) = \\ &= \lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad - bc) \\ & \lambda^2 - \lambda Tr(A) + \det(A) \end{aligned}$$

där $\mathrm{Tr}(A) = a + d$.

■

Exempel.

Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Karakteristiska polynomet för 2×2 matrisen A är $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

Egenvärden är då rötter till det polynomet, nämligen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

Egenvektorer $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ som hör till egenvärdena $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 3$ är icketriviala lösningar till ekvationessystem

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\,\mathbf{v}_1 &= 0. \\ (A - \lambda_2 I)\,\mathbf{v}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Motsvarande matriser är

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

och

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

I fall med 2×2 matriser är det lätt att få fram egenvektorer, eftersom det finns bara en oberoende ekvation för varje egenvektor.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

■

Svåra delen i problemet med egenvektorer och egenvärden är att bestämma egenvärden. Om egenvärden är kända, så hittar man egenvektorer med hjälp av Gauss elimination. Egenvärden till en $n \times n$ matris A är rötter till n-te grads karakteristiska polynomet:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Det finns ingen formel för rötter i fall $n > 4$.

Exempel.

Bestäm egenvärden till matris $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

Beräkna karakteristiska polynomet.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Sätt summan av andra raden och tredje raden istället för andra raden. Determinanten blir samma:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & -2-\lambda \\ -1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Utveckla sista determinanten längs första kolonnen:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-2-\lambda)\left((1-\lambda)(-\lambda+1) + (-1)(1)\right) = \\ &= (-2-\lambda)\left(-\lambda + 1 + \lambda^2 - \lambda - 1\right) \\ &= -(2+\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda(2+\lambda)(\lambda-2) \end{aligned}$$

Karakteristiska polynomet är $p(\lambda) = 4\lambda - \lambda^3$.

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2$. Vi fick tre olika egenvärden till matrisen 3×3. Egenvektorer kan man få fram med hjälp av Gauss elimination från motsvarande ekvationessystem

$$(A - \lambda_k I)\,\mathbf{v}_k = 0, \qquad k = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 0;\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = -2;\ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_3 = 2$$

Enligt en sats som förmuleras senare är dessa egenvektorer linjärt oberoende och utgör en bas i $\mathbb{R}^3$ eftersom de svarar mot tre olika egenvärden till A.

Example.

Bestäm egenvärden till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Beräkna karakteristiska polynomet.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 4 \\ 3 & -2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Byt subtrahera andra raden från tredje raden och sätt resultatet istället för tredje raden och sedan byt andra kolonnen med summan av andra och tredje kolonnen.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 4 \\ 0 & 2+\lambda & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Addera tredje kolonnen till andra kolonnen

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 3 & -\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Utveckla sista determinanten over sista raden:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \\ &= -(2+\lambda)\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix} = \\ -(2+\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda - 6\right) &= -(2+\lambda)^2(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Karakteristiska polynomet är $p(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda + 12$.

Egenvärden är $\lambda_{1,2} = -2$, har multiplicitet 2(dubbelrot), $\lambda_3 = 3$.

Egenvektorer: $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow -2, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3$

■

Exempel.

Bestäm egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

om egenvärden av A är $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 3$ (prova detta!). Ekvationssystemet $(A - 2I)\,\mathbf{x} = 0$ för egenvektorer till λ_1 har matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{Gauss} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{Gauss} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta ger bara en linjärt oberoende vektor till multipla egenvärdet λ_1.
Ekvationssystemet $(A - 3I)\,\mathbf{x} = 0$ för egenvektorer till λ_2 har matrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{Gauss} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{Gauss} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger en linjärt oberoende vektor till enkla egenvärdet λ_2.
■