Ortogonalitet. Fredholm satsen. Spektralsatsen för symmetriska matriser.

Definition.

För två godtyckliga kolonnvektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ur $\mathbb{R}^n$ skalärprodukt (inre produkt i Lay) är ett reelt tal som betecknas med $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ och beräknas enligt formeln

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Egenskaper hos skalär produkt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\
(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \\
(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= c\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\
\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &\geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Definition.

Längden av en vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ är ett icke negativt tal (jämför med Pythagor satsen)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}; \\
\|\mathbf{v}\|^2 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}
\end{aligned}$$

Definition.

För godtyckliga $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ avståndet mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$

$$\operatorname{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

Definition

Två vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ är ortogonala (mot varandra) om deras skalär produkt är noll: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Pythagor satsen

Två vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ är ortogonala om och endast om $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.

Bevis.

$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

högerledet är lika med $\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$ om och endast om $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$, d.v.s. om $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ är ortogonala mot varandra.$\blacksquare$

Ortogonala komplementet $W^{\perp}$ till ett underrum W.

Definition. (i texten på sid. 352 i Lay)

Låt W vara ett underrum i $\mathbb{R}^n$.(Till exempel ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$).

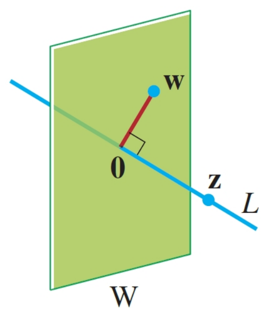
Låt mängden $W^{\perp}$ bestå av alla vektorer $\mathbf{v}$ ur $\mathbb{R}^n$ortogonala till alla vektorer $\mathbf{w}$ ur W, nämligen sådana vektorer att relationen $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$ gäller. Mägngden $W^{\perp}$ kallas ortogonala komplementet till W i $\mathbb{R}^n$.

□

Exempel

Låt ett underrum W i $\mathbb{R}^3$ vara ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$. $W^{\perp} = L$ är då en linje genom origo, ortogonal till planet W.

I fall vi väljer ett underrum L i $\mathbb{R}^3$ som en linje genom origo, kommer $L^{\perp}$ vara ett plan genom origo, ortogonal till den linjen.



Man säger ofta att $W^{\perp}$ och W är ortogonala komplementen till varandra.

□

Det är lätt att se att

$$\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$$

Radrummet $\mathrm{Row}(A)$

Matriser som har bara en rad (vi får kalla dem för radvektorer) utgör ett vektorrum med avseende på matrisaddition och multiplikation med reella tal.

Definition.

Mängden av alla linjära kombinationer av **transponerade rader** ur en $m \times n$ matris A utgör ett underrum i $\mathbb{R}^n$ som kallas radrummet för matrisen A och betäcknas med $\mathrm{Row}(A)$.

Vi kunde också definiera radrummet av matrisen A som kolonnrummet av transponerade matrisen A^T.

$$\mathrm{Row}(A) \overset{def}{=} \mathrm{Col}(A^T)$$

Lite skum definition för radrummet $\mathrm{Row}(A)$ ges på sidan 249 i Lay. Vi ger här n lite mera exakt definition med att ta **transponerade rader** ur A för att direkt bygga ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

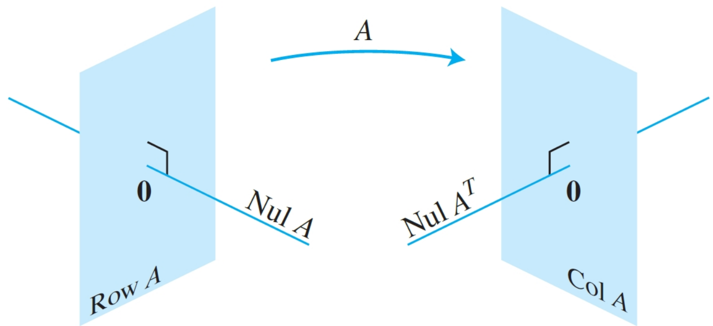


FIGURE 8 The fundamental subspaces determined by an $m \times n$ matrix A.

Satsen om relationen mellan kolonnrummet av en matris och nollrummet av dess transponat $(\mathrm{Col}(A))^{\perp} = \mathrm{Nul}(A^T)$ (Fredholm satsen). Sats 6.1.3, sid. 353

Låt A vara en $m \times n$ matris.

1. Ortogonala komplementet $(\mathrm{Row}(A))^{\perp}$ till $\mathrm{Row}(A)$ är nollrummet $\mathrm{Noll}(A)$ till A
2. Ortogonala komplementet $(\mathrm{Col}(A))^{\perp}$ till $\mathrm{Col}(A)$ är nollrummet $\mathrm{Noll}(A^T)$ till A^T
3. Kolonnrummet $\mathrm{Col}(A)$ är ortogonala komplementet $\left(\mathrm{Noll}(A^T)\right)^{\perp}$ till nollrummet $\mathrm{Noll}(A^T)$ till A^T

En kort reformulering av detta ges av formler:

$$\begin{aligned} (\mathrm{Row}(A))^{\perp} &= \mathrm{Noll}(A) \\ (\mathrm{Col}(A))^{\perp} &= \mathrm{Noll}(A^T) \end{aligned}$$

Andra ekvationen kan också skrivas om som

$$\mathrm{Col}(A) = \left(\mathrm{Noll}(A^T)\right)^{\perp}$$

Bevis.

Ekvivalenta andra och tredje påståenden i satsen kallas Fredholm satsen.

De följer direkt från påståendet 1. genom att ersätta A med A^T och A^T med A.

Vi ger bevis til påståendet 1.som har direkt samband med våra kunskaper om linjära system ekvationer.

Låt $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, , ..., $\mathbf{r}_m$ beteckna rader i $m \times n$ matrisen A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix}$$

Vi är intresserade av $\mathrm{Noll}(A)$ som är lösningsmängden till homogena ekvationen $A\mathbf{x} = 0$.

Beräkna produkten $A\mathbf{x}$ av matrisen A med en godtycklig vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ med hjälp av rad - kolonn regeln. Vi observerar då att varje komponent med nummer k i produkten $(A\mathbf{x})$ som är vektor ur $\mathbb{R}^m$, är matris produkt $\mathbf{r}_k\mathbf{x}$ och är samtidigt skalär produkt av vektorn $\mathbf{x}$ med transponerade raden $(\mathbf{r}_k)^T$ med nummer k ur matrisen A.

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1\mathbf{x} \\ \mathbf{r}_2\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{r}_1)^T \cdot \mathbf{x} \\ (\mathbf{r}_2)^T \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ (\mathbf{r}_m)^T \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

Detta visar att $\mathbf{x}$ hör till Noll(A) , d.v.s $A\mathbf{x}$ =0 om och endast om alla skalära produkter i höger är lika med noll. Detta betyder att $\mathbf{x}$ är ortogonal till alla transponerade rader ur A och att $\mathbf{x}$ hör till $(\text{Row}(A))^\perp$.

Detta bevisar påståendet 1.

2. följer direkt från 1 med att använda att $\left(A^T\right)^T = A$ och med att ersätta A i formuleringen av 1. med A^T .

3. följer från 2. genom observationen att för ett godtyckligt underrum W i $\mathbb{R}^m$gäller att $\left(W^\perp\right)^\perp = W$, d.v.s att ortogonala komplementet av ortogonala komplementet av ett underrum är samma som själva underrummet.

■

Viktig slutsats från påståendet 2. i Sats 6.1.3 (kallas också Fredholm satsen)

Ett linjärt systemekvationer $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning om och endast om $\mathbf{b}$ är ortogonal till nollrummet av A^T.

□

Bevis.

Systemekvationer $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning om och endast om $\mathbf{b}$ hör till kolonnrummet Col(A), som är samma som ortogonala komplementet $\left(\text{Noll}(A^T)\right)^\perp$ till Noll(A^T). Så systemet har en lösning om och endast om $\mathbf{b}$ är ortogonal till Noll(A^T).

■

Exempel.

1. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ och vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$.

   Anänd basen till $Null(A^T)$ och Fredholm satsen för att bevisa att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix};\ A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Row echelon form till A^T fås med Gauss elimination: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

bas till nullspace $Null(A^T)$: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Satsen om sambandet mellan ortogonala komplementet $(Col(A))^{\perp}$ till colonnrummet $Col(A)$ och nullrummet till transponat matris $Null(A^T)$ säger att $(Col(A))^{\perp} = Null(A^T)$.

Detta medför Fredholm satsen som säger att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning om och endast om $\mathbf{b}$ är ortogonal till $Null(A^T)$. Detta följer från att $\mathbf{b}$ är ortogonal till alla basvektorer i $Null(A^T)$: både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ i vårt fall. Vi testar detta:

$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$; $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. Systemet är lösbart enligt Fredholm satsen.

■

Ortogonala uppsättningar vektorer.

Definition.

En uppsättning vektorer$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_p\}$ ur $\mathbb{R}^n$ är ortogonal mängd om varje par av olika vektorer ur uppsättningen är ortogonala mot varandra: $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$, för alla $i \neq j$.

Satsen om bas av ortogonala vektorer. Sats 6.2.4, sid. 356. (bevis krävs på tentan)

Låt $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_p\}$ vara en ortogonal uppsättning vektorer skillda från noll i $\mathbb{R}^n$.

Den uppsättningen är **linjärt oberoende och utgör en bas till spannet Span$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_p)$ av dessa vektorer.**

Bevis. (bevis krävs på tentan)

Betrakta en linjär kombination av givna uppsättningen vektorer lika med noll:

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + ... + c_p\mathbf{u}_p = 0$$

Skalär produkt av den lijära kombinationen med en godtycklig vektor $\mathbf{u}_k$ ur den uppsättningen är like med noll och

$$c_1\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_k + c_2\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_k + ...c_k\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k + ... + c_p\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_k = 0$$

Alla skalära produkter i den summan är noll förutom .$\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k = \|\mathbf{u}_k\|^2 \neq 0$. Detta medför att

$$c_k \|\mathbf{u}_k\|^2 = 0$$

och $c_k = 0$, för alla $k = 1, ..., p$ och att vektorer $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_p\}$ är linjärt oberoende per definition.

■

Definition. En ortogonal bas $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_p\}$ till ett underrum W är en bas som är en ortogonal uppsättning vektorer.

□

Sats 6.2.5 Om koordinater med avseende på en ortogonal bas

Låt $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_p\}$ vara en **ortogonal bas** till ett underrum W av $\mathbb{R}^n$. Koordinater av varje vektor $\mathbf{y} \in W$ med avseende på den basen beräknas enligt formeln:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + ... + c_p\mathbf{u}_p \\ c_k &= \frac{y \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} = \frac{y \cdot \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2}, \quad k = 1, ..., p \end{aligned}$$

Proof.

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{u_k} = c_1\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_k + ...c_k\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k + ... + c_p\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_k = c_k\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k = c_k \|\mathbf{u}_k\|^2$$

■

Lägg märke till att det är väldigt lätt att beräkna koordinater med avseende på ortogonala basen jämfört med vanlig bas, där man måste lösa ett system ekvationer för koordinater $\mathbf{c} = [c_1, c_2, ..., c_p]^T$:

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_p]\,\mathbf{c} = \mathbf{y}$$

Exempel.
Betrakna ortogonal bas S:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

Express the vector $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$ as a linear combination of the vectors in S.

SOLUTION Compute

$$\begin{aligned} \mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1 &= 11, & \mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_2 &= -12, & \mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_3 &= -33 \\ \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 &= 11, & \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2 &= 6, & \mathbf{u}_3\cdot\mathbf{u}_3 &= 33/2 \end{aligned}$$

By Theorem 5,

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3 \\ &= \frac{11}{11}\mathbf{u}_1 + \frac{-12}{6}\mathbf{u}_2 + \frac{-33}{33/2}\mathbf{u}_3 \\ &= \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

Ortogonal projektion av en vektor på en annan vektor och geometriska meningen med koordinater i ortogonal bas. sid. 358.

Definition.

Låt $\mathbf{u}$ vara en fixerad vektor ur $\mathbb{R}^n$. För en godtycklig vektor $\mathbf{y}$ ur $\mathbb{R}^n$ betrakta dess framställning som summan av en vektor $\mathbf{z}$ ortogonal till $\mathbf{u}$ och en vektor $\widehat{\mathbf{y}} = \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{y}$ parallell med $\mathbf{u}$ så att $\widehat{\mathbf{y}} = \alpha\mathbf{u}$ för något tal α.

$$\widehat{\mathbf{y}} = \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{y} \overset{def}{=} \left(\frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\right)\mathbf{u}$$

Det är lätt att kolla att $\mathbf{y}-\widehat{\mathbf{y}}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{y}-\widehat{\mathbf{y}})\cdot\mathbf{u} &= \left(\mathbf{y}-\frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{u} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{u}-\frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \\ &= \mathbf{y}\cdot\mathbf{u} - \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{y}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{y}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

EXAMPLE 3 Let $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix}$ and $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$. Find the orthogonal projection of $\mathbf{y}$ onto $\mathbf{u}$. Then write $\mathbf{y}$ as the sum of two orthogonal vectors, one in Span $\{\mathbf{u}\}$ and one orthogonal to $\mathbf{u}$.

SOLUTION Compute

$$\mathbf{y}\cdot\mathbf{u} = \begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 40$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 20$$

The orthogonal projection of $\mathbf{y}$ onto $\mathbf{u}$ is

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{40}{20}\mathbf{u} = 2\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$$

and the component of $\mathbf{y}$ orthogonal to $\mathbf{u}$ is

$$\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

The sum of these two vectors is $\mathbf{y}$. That is,

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{y}}}{\begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix}} = \underset{\substack{\uparrow\\ \hat{\mathbf{y}}}}{\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}} + \underset{\substack{\uparrow\\ (\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}})}}{\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}}$$

Geometriska menigen med koordinater $\{c_1, , ..., c_p\}$ med avseende på en ortogonal bas från Sats 6.2.5

Låt $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_p\}$ vara en **ortogonal bas** till ett underrum W av $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + ... + c_p\mathbf{u}_p \\ c_k &= \frac{y \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} = \frac{y \cdot \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2}, \quad k = 1, ..., p \end{aligned}$$

är att en godtycklig vektor $\mathbf{y}$ framställd som summan av dess projektioner $\text{proj}_{\mathbf{u}_k}\mathbf{y} = c_k\mathbf{u}_k$ på basvektorer $\mathbf{u}_k$: $k = 1, ..., p$.

$$\mathbf{y}{=}\text{proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{y} + \text{proj}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{y} + ... + \text{proj}_{\mathbf{u}_p}\mathbf{y}$$

■

Ortonormala uppsättningar vektorer och ortogonala matriser.

Låt $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_p\}$ vara en uppsättning vektorer skillda från noll i $\mathbb{R}^n$. Den uppsättning vektorer kallas **ortonormal** om den är ortogonal och alla vektorer $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_p\}$ har längden (normen i allmänna sammanhang) lika med ett $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = ... = \|\mathbf{u}_p\| = 1$.

Den enklaste exempel av en sådan uppsättning är standarta basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ...\mathbf{e}_n\}$ i $\mathbb{R}^n$.

Exempel.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$$

Det är lätt att kolla att dessa vektorer är ortogonala mot varandra och normerade, och utgör en ortonormal bas i $\mathbb{R}^3$.

Definition.

Kvadratisk $n \times n$ matris U är **ortogonal om den har ortonormala kolonner.**

Exempel

Betrakta matrisen $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ som är standarta matrisen av transformationen som utgör rotation i vinkeln θ i planet.

Den är ortogonal eftersom $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = -\cos\theta\sin\theta{+}\sin\theta\cos\theta = 0$ och $\left\| \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right\|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Rotationer i planet bevarar längder och vinklar i planet,

$$\begin{aligned} \|R\mathbf{x}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 \\ (R\mathbf{x}) \cdot (R\mathbf{y}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

Man kan dessutom observera att $R^T = R^{-1}$. Betrakta tranformationen med matrisen R^T :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

utgör rotation i vinkeln $-\theta$ i planet och är då en invers till rotation i vinkeln θ (roterar i samma vinkeln men åt motsatt håll). Det exemplet beskriver faktiskt ALLA ortogonala 2×2 matriser.

Samma egenskaper har faktiskt alla ortogonala matriser U (matriser som har ortogonala och normerade kolonner).

Satsen om egenskaper hos ortogonala matriser. (Lite förenklade satser 6.2.6 och 6.2.7, sid. 361 i fall med kvadratiska matriser)

Det är lätt att se att för en $n \times n$ ortogonal matris U gäller följande lämpliga egenskaper:

$$\begin{aligned} U^T &= U^{-1} \\ \|U\mathbf{x}\| &= \|\mathbf{x}\| \\ (U\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{U}\mathbf{y}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ (U\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{U}\mathbf{y}) &= 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Vi bevisar att $U^T = U^{-1}$.

Låt $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_n]$

$$U^T U = \begin{matrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{matrix} [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_n^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n^T\mathbf{u}_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \end{bmatrix} = I$$

Detta medför att U^T är vänster invers till A och måste då vara också invers: $U^T = U^{-1}$.

■

Övriga egenskaper följer direkt från den första och betyder att transformationen $T(\mathbf{y}) = U\mathbf{y}$ bevarar längder av vektorer och vinklar mellan vektorer. Sådana transformationer påminner vanliga rotationer i planet eller i rummet.

Matrisen U har också ortogonormala rader. (Exercises 6.2.27, 6.2.28)

Diagonalisering av symmetriska matriser. Spektralsatsen och spektral dekomposition.

Satsen om egevektorer till symmetriska matriser. Sats 7.1.1, sid. 413

Om matrisen A är symmetrisk, nämligen om $A = A^T$, så måste två godtyckliga egenvektorer $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ som hör till olika egenvärden $\lambda_1 \neq \lambda_2$vara ortogonala mot varandra: $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

□

Bevis (krävs inte på tentan)

Låt $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ vara egenvektorer som hör till två olika egenvärden λ_1 och λ_2. Vi betraktar uttrycket $\lambda_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ och använder att $\lambda_1\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}_1$ och $\lambda_2\mathbf{v}_2 = A\mathbf{v}_2$ och definitionen på skalär produkt och att A är symmetrisk: $A = A^T$

$$\begin{aligned} \lambda_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= (\lambda_1\mathbf{v}_1)^T \mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^T \mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_1)^T A^T \mathbf{v}_2 = \\ (\mathbf{v}_1)^T A\mathbf{v}_2 &= (\mathbf{v}_1)^T (\lambda_2\mathbf{v}_2) = \lambda_2\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Den likheten är möjlig bara om $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ eftersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

■

Satsen om diagonalisering av symmetriska matriser. Sats. 7.1.2, sid. 414

En $n \times n$ matris A är **ortogonalt (!!!)** diagonaliserbar $P^{-1}AP = D$ med en **ortogonal matris** P (med n **ortonormala** egenvektorer som kolonnvektorer) om och endast om $\Longleftrightarrow$ matrisen A är symmetrisk.

Det viktigaste påståendet är år vänster $\Longleftarrow$: **att alla symmetriska** $n \times n$ **matriser har** n **ortonormala egenvektorer (som är automatiskt linjärt oberoende)**

□

Nästa sats är en sammanställning av alla spektrala egenskaper hos symmetriska matriser.

Spektralsatsen. Sats 7.1.3, sid. 415.

En godtycklig symmetrisk $n \times n$ matris A har följande egenskaper:

a. A har alla egenvärden som är reella tal (n stycken om man räknar multiplicitet)

b. Dimensionen av egenrum (antalet linjärt oberoende egenvektorer som hör till ett egenvärde) till varje distinkt egenvärde är samma som dess multiplicitet (multiplicitet som roten av karakteristiska polynomet).

c. egenvektorer som svarar mot olika egenvärden är ortogonala till varandra. (Sats 7.1.1 som var formulerad tidigare)

d. matrisen A är ortogonalt diagonaliserbar (det är sats 7.1.2 som var formulerad tidigare.)

□

Spektral dekomposition. sid. 418.

Om vi tillämpar resultat om ortogonal diagonalisering av symmetriska matriser, så är det lätt att observera att alla symmetriska matriser A kan framställas genom sina egenvektorer och egenvärden på ett väldigt lämpligt och enkelt sätt som kallas **spektral dekomposition**.

Låt P vara en ortogonal matris med kolonnerna $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n] = P$ som är **ortonormala** egenvektorer $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$,till A. Låt$\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ vara motsvarade egenvärden, och D vara diagonalmatrisen med dessa egenvärden som diagonala element, numrerade i samma ordning som egenvektorerna.

Lägg märke till att P är en ortogonal matris och dess invers är lika med dess transponat $P^{-1} = P^T$. Vi skriver ner formeln för diagonalisering av A och förenklar den med hänsyn till att $P^{-1} = P^T$.

$$
\begin{aligned}
A &= PDP^{-1} = PDP^T = \\
&= [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \\
&= [\lambda_1 \mathbf{u}_1, \lambda_2 \mathbf{u}_2, ..., \lambda_n \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + ... \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T
\end{aligned}
$$

■

Den sista formeln kallas **spektrala dekompositionen** av symmetriska matrisen A, som är en linjär kombination av standarta matriser $\left[\mathrm{proj}_{\mathbf{u}_k}\right] = \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T$ för ortogonala projektioner $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}_k}$ på egenvektorer $\mathbf{u}_k$, med koefficienter som är lika med egenvärden λ_k för $k = 1, ...n$.

$$
\begin{aligned}
A &= \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + ... \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T \\
&= \lambda_1 \left[\mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}\right] + \lambda_2 \left[\mathrm{proj}_{\mathbf{u}_2}\right] + ... \lambda_n \left[\mathrm{proj}_{\mathbf{u}_n}\right]
\end{aligned}
$$

□

Den framställningen är speciellt lämplig när man betraktar en linjär transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Egenvektorer och egenvärden och den framställningen för en linjär transformation med symmetrisk standart matris A har ofta fysikalisk mening (speciellt i kvantmekanik).

Exempel.

Ange spektraldekomposition av matrisen $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, karakteristiskt polynom är : $p(\lambda) = \lambda^2 - 11\lambda + 24$.

Egenvärden är , $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 3$. Egenvektorer är: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 8$; $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 3$, fås genom att lösa homogena ekvationssytem med matriser $(A - 8I) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ och $(A - 3I) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Normerade egenvektorer $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ fås med att multiplicera varje av dessa egenvektorer med resiprok av dess längd (samma $\sqrt{5}$ just i det fallet):

$$
\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}; \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}
$$

Spektraldekompositionen av A är då

$$
\begin{aligned}
A &= 8\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + 3\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T \\
&= 8\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \\
&\stackrel{ber\ddot{a}kning}{=} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

■