MATEMATIK | Datum: 2018-01-13 | Tid: eftermiddag (kl 14.00-18.00)
Chalmers | Hjälpmedel: inga. **Mobiltelefoner är förbjudna.**
Kursansvarig: Alexei Heintz | Telefonvakt: Carl Lundholm ankn. 6792

Tenta i MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning. K/Bt/Kf

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

1. **Integraler och primitiva funktoner.**

a) Beräkna $\displaystyle\int x\sin^2(x)dx.$ **(2p)**

b) Beräkna $\displaystyle\int_0^2 \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}.$ **(3p)**

Lösning.

a) $\displaystyle\int x\sin^2(x)dx = \int x\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx = \int \frac{x}{2}dx - \frac{1}{2}\int x\cos(2x)dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\int xd\sin(2x) =$
$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\int \sin(2x)dx =$
$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{4}x\sin 2x + C.$

b) Partiellbråksuppdelning ger: $\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}$;
$\int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{2x+1}dx = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y+1}dy = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(2x+1)$
$\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)} = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C$
Integralkalkulenshuvudsats medför: $\int_0^2 \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)} = \left[\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]\Big|_0^2 = \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5.$

2. **Tillämpningar av integraler**.

a) Beräkna arean av figuren i halvplanet $x \geq 0$ som är begränsad av två linjer: cirkeln $x^2 + y^2 = 16$ och parabeln $y^2 = 6x$.

Tips: Det lämpligt att använda variabelbytet av typ $x = a\sin(t)$ i en av integraler som uppstår. **(4p)**

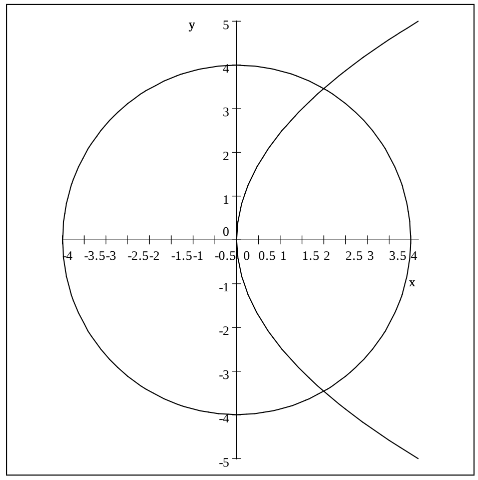
b) Beräkna volumen av rotationskroppen som är byggd med att rotatera runt x - axeln begränsade figuren mellan parabeln $y = x^2 + 1$ och linjen $y = 3x - 1$.

c) Beräkna volumen av rotationskroppen som är byggd då figuren begränsad av parabeln $y = 2x - x^2$, och intervall $[0, 2]$ på x - axeln, roteras runt y - axeln.

d) Bestäm om arean mellan grafen till funktionen $f(x) = |x|\exp(-x^2)$ och x - axeln är begränsad och beräkna den i så fall. **(3p)** **(3p)**

Lösning.

a) Skiss av figuren:



Skärningspunkter mellan parabeln och cirkeln bestämmes som lösning till system ekvationer $x^2 + y^2 = 16$ och $y^2 = 6x$.Detta som medför att $x^2 + 6x - 16$, och rötter till det polynomet är $x_1 = 2$ och $x = -8$. Roten $x = -8$ är negativ och finns inte på parabeln.

Bilden är symmetrisk med avseende på x axeln. Det räcker att beräkna arean av halvan av figuren. Intervallet för y inom den figuren är $\left[-\sqrt{6x_1}, \sqrt{6x_1}\right] = \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$. Figuren är symmetrisk med avseende på x - axeln, så det räcker att beräkna hälften av arean. Vi delar upp figuren i två intervall för x:

$Arean = 2\int_0^2 \sqrt{6x} + 2\int_2^4 \sqrt{16 - x^2}dx = I_1 + I_2$

$\int \sqrt{6x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{6}$

$I_1 = 2\int_0^2 \sqrt{6x} = \frac{8}{3}\sqrt{12} = \frac{16}{3}\sqrt{3}$

$I_2 = 2\int_2^4 \sqrt{16 - x^2}dx;$

Använd variabelbytet $x = 4\sin(t)$, $dx = 4\cos(t)dt$.

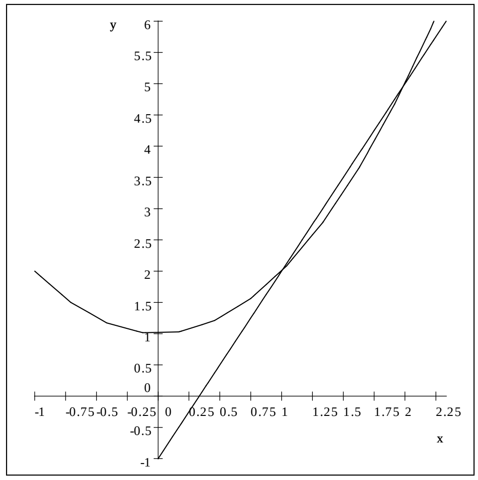
$x = 4$ för $t = \pi/2$; $x = 2$ för $t = \pi/6$.$\int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t$

$I_2 = 2\int_2^4 \sqrt{16 - 16\sin^2 t}\,(4\cos(t))\,dt = 32\int_2^4 \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos(t)dt = 32\int_{\pi/6}^{\pi/2} (\cos t)^2\,dt = 32\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = 32\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}.$

$Arean = I_2 + I_1 = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3} + \frac{16}{3}\sqrt{3} = \frac{16}{3}\pi + \frac{4}{3}\sqrt{3}.$

Svar: $Arean = \frac{16}{3}\pi + \frac{4}{3}\sqrt{3}\blacksquare$

b) Skiss av figuren:



Skärningspunkter mellan parabeln och linjen kan bestämmas som lösningar till ekvationssystemet $y = x^2 + 1$ och $y = 3x - 1$.

Detta medför att $x^2 + 1 = 3x - 1$, och lösningar till den ekvationen är $x_1 = 1$ och $x = 2$. Se på bilden att begränsade figuren mellan raka linjen och parabeln svarar mot $1 \le x \le 2$. Volumen kan framställas med hjälp av formeln med skivor:

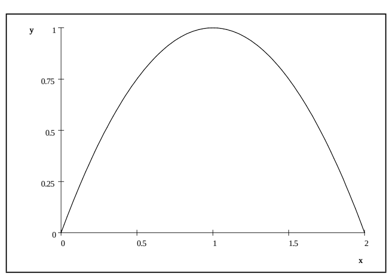
$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [r_1(x)]^2 - [r_2(x)]^2 \, dx = \pi \int_1^2 \left[(3x-1)^2 - \left(x^2+1\right)^2 \right] dx \\
&= \pi \int_1^2 \left[\left(9x^2 - 6x + 1\right) - \left(2x^2 + x^4 + 1\right) \right] dx \\
&= \pi \int_1^2 \left(7x^2 - 6x - x^4\right) dx = \pi \left(\frac{7}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right) \Bigg|_1^2 = \frac{17}{15}\pi
\end{aligned}
$$

Termerna beräknade separat ser ut som: $\pi \int_1^2 (3x-1)^2 \, dx = 13\pi$; $\pi \int_1^2 \left(x^2+1\right)^2 dx = \frac{178}{15}\pi$

c) Beräkna volumen av rotationskroppen som är byggd då figuren begränsad av parabeln $y = 2x - x^2$, och intervall $[0, 2]$ på x - axeln, roteras runt y - axeln. **(3p)**

Lösningsförslag:

Bilden på roterande figuren:



Formeln för volum med hjälp av cylindriska skal:

$$\begin{aligned} Volum &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx = \\ 2\pi \int_0^2 x\left(2x - x^2\right) dx &= \\ 2\pi \int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx &= 2\pi \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{x=0}^{2} = 2\pi\left(\frac{2}{3}2^3 - \frac{1}{4}2^4\right) \\ &= 2\pi\left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) = 32\pi\frac{4-3}{12} = \pi\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Svar: $Volum = \pi\frac{8}{3}$.

d) Bestäm om arean mellan grafen till funktionen $f(x) = |x| \exp(-x^2)$ och x - axeln är begränsad och beräkna den i så fall. **(3p)**

Lösningsförslag:

$Arean = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \exp(-x^2) dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} |x| \exp(-x^2) dx = 2 \lim_{R\to\infty} \int_0^R x \exp(-x^2) dx =$

$2 \lim_{R\to\infty} \left(\frac{-1}{2}\right) \int_0^R \exp(-x^2) d\left(-x^2\right) = 2 \lim_{R\to\infty} \left(\frac{-1}{2}\right) \exp(-x^2)\Big|_{x=0}^{R} =$

$\lim_{R\to\infty} \left(1 - \exp(-R^2)\right) = 1$

Svar: Arean är begränsad och är lika med 1.

3. **Differentialekvationer.**

a) Lös begynnelsevärdesproblem: $y' - y\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)}$; $y(0) = 0$. **(3p)**

b) Ange allmän lösning till ekvationen $y'' - 7y' + 6y = \sin(x)$.

c) Lös begynnelsevärdesproblemet: $x'(t) = t \cdot x^3$; $x(0) = 1/2$. Bestäm tidsintervall då den lösningen gäller. **(3p)**

Lösning.

a) Ekvationen är linjär av första ordningen på formen $y' + p(x)y = g(x)$ med begynnelsevillkor $y(x_0) = y_0$.

Den löses med hjälp av formeln:

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)ds\right)\left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} p(t)dt\right) ds\right)$$

$p(x) = -\tan(x)$, $g(x) = 1/\cos(x)$, $y(x_0) = 0$.

$\int_{x_0}^{x} p(s)ds = \int_0^x -\tan(s)ds = \ln(\cos x) - \ln(\cos 0) = \ln(\cos x)$

$\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)ds\right) = \exp(-\ln(\cos x)) = \frac{1}{\cos(x)}$

$\int_0^x g(s)\exp\left(\int_0^s p(t)dt\right) ds = \int_0^x \frac{1}{\cos(s)} \exp(\ln(\cos s))\, ds = \int_0^x ds = x$

Svar: $y(x) = \frac{x}{\cos(x)}$.■

b) $y'' - 7y' + 6y = \sin(x)$.

Karakteristisk ekvation är $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, rötter är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$.

Detta medför att allmän lösning till homogena differentialekvationen $y'' - 7y' + 6y = 0$ är $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

Rötter till karakteristiska ekvationen är inte lika med $\pm i$.

Detta medför att en partikulär lösning till inhomogena ekvationen kan hittas på formen $y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$.

Vi hittar koefficienterna A och B med att sätta den formeln in i ekvationen.

$-A\sin(x) - B\cos(x) - 7(A\cos(x) - B\sin(x)) + 6\,(A\sin(x) + B\cos(x)) = (5B - 7A)\cos x + (5A + 7B)\sin x = \sin(x)$

Detta medför ett system ekvationer för A och B.

$-7A + 5B = 0$ and $(5A + 7B) = 1$. Vi skriver det på matris form:

$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, Gauss elimination ger trappstegsformen $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 0 & \frac{74}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$,

Tillbaka substitution ger reducerade trappstegsformen: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{74} \\ 0 & 1 & \frac{7}{74} \end{bmatrix}$. $A = \frac{5}{74}$ och $B = \frac{7}{74}$.

$y_p(x) = \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x$

Svar: Lösningen är $y = \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x + C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

c) Lös begynnelsevärdesproblemet: $x'(t) = t \cdot x^3$; $x(0) = 1/2$. Bestäm tidsintervall då den lösningen gäller. **(3p)**

Lösningsförslag:

Ekvationen $\frac{dx}{dt} = t \cdot x^3$ har separabla variabler.

$\frac{dx}{x^3} = t\,dt$; $\int \frac{dx}{x^3} = \int t\,dt$; $-\frac{1}{2x^2} = \frac{t^2}{2} + \frac{C}{2}$; $-\frac{1}{x^2} = t^2 + C$, där C är en godtycklig konstant.

Vi använder begynnelsevillkoret för $t = 0$ för att bestämma konstanten C: $C = -4$.

$-\frac{1}{x^2} = t^2 - 4$ och $x^2(t) = \frac{1}{4-t^2}$.

Svar: $x(t) = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}$. Lösningen gäller på öppna intervallet $(-2, 2)$.

4. **Rank, kolonnrum, nollrum. Lösbarhet av linjära system.**

Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ och vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm dimensionen av kolonnrummet $Col(A)$ och dimensionen av nollrummet $Null(A)$ till A. **(2p)**

b) Bestäm om $\mathbf{b}$ hör till kolonnrummet $Col(A)$ till A. **(2p)**

c) Betrakta transponat A^T av A och ange en bas till dess nollrum $Null(A^T)$. **(2p)**

d) Anänd basen till $Null(A^T)$ och Fredholm satsen för att bevisa att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart. **(2p)**

Lösning.

a) Dimension av kolonnrummet till en matris kallas för matrisens rank och är lika med antalet pivot element. Dimention av nollrummet är lika med antalet fria variabler och är lika med $n - rank$ där n är antalet kolonner. Det är lätt att se att kolonnerna i A är linjärt oberoende: de är två ickeparallella vektorer i $\mathbb{R}^4$. Rank är lika med 2. Nollummet $Null(A)$ består bara av en nollvektor och har dimension noll.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, Gaussian elimination ger trappstegsmatrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.Man ser att kolonnerna i A är linjärt oberoende.

b) Gausselimination på utvidgade matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$, ger $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ som visar att $\mathbf{b}$ hör till kolonnrummet $Col(A)$ till A.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Trappstegsformen till A^T fås med Gauss elimination: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

bas till nullspace $Null(A^T)$: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) Satsen om sambandet mellan ortogonala komplementet $(Col(A))^\perp$ till colonnrummet $Col(A)$och nullrummet till transponat matris $Null(A^T)$ säger att $(Col(A))^\perp = Null(A^T)$.

Detta medför Fredholm satsen som säger att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning om och endast om $\mathbf{b}$ är ortogonal till $Null(A^T)$.

Detta följer från att $\mathbf{b}$ är ortogonal till alla basvektorer i $Null(A^T)$: både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ i vårt fall. Vi testar detta:

$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$; $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. Systemet är lösbart enligt Fredholms sats.

(8p)

5. **Linjära transformationer.**

Ange standard matris till linjär transformation från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som utgör först spegling i linjen $x = y$ i planet och sedan rotation moturs runt origo i vinkel $\pi/3$. **(4p)**

Lösning.

Standardmatris till transformation T har kolonner som är bilder av basvektorer $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$.

Transformationen av $\mathbf{e}_1$ ger först $\mathbf{e}_2$ efter speglingen. Rotation av $\mathbf{e}_2$ i vinkel $\pi/3$ (60 grader) ger vektorn $\begin{bmatrix} \cos(\pi 5/6) \\ \sin(\pi)5/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Transformationen av $\mathbf{e}_2$ ger först $\mathbf{e}_1$ efter speglingen. Rotation av $\mathbf{e}_1$ i vinkel $\pi/3$ (60 grader) ger vektorn $\begin{bmatrix} \cos(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

Standardmatrisen är $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

6. **Egenvektorer, egenvärden, diagonalisering. System linjära ODE.**

a) Bestäm om matriser $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$, och $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, kan diagonaliseras och i så fall ange motsvarande diagonalmatris och transformationsmatris. **(4p)**

b) Betrakta systemet ODE: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ med $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$. Ange allmän lösning och skissa fasportrett.

Bestäm lösningen som uppfyller begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$. **(4p)**

Lösning.

a) matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$, har karakteristiskt polynom: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, eigenvektorer: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = -2$. Egenvärden är olika, detta medför att egenvektorer måste vara linjärt oberoende.

Det är lätt att se i det fallet med två vektorer $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ att de är linjärt oberoende: icke paralella här.

Matrisen A diagonaliseras med matrisen $P = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, nämligen $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Matrisen $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, har karakteristiskt polynom: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$,egenvärdet är $\lambda = 3$ och har multiplicitet 2.

Det finns bara en linjärt oberoende egenvektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ som är lösningen till ekvationen $(B - 3I)\mathbf{w}=\mathbf{0}$, eller $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Enligt satsen om tillräckligt och nödvändigt kriterium för diagonaliserbara matriser matrisen B kan inte diagonaliseras

b) Allmän lösning till ekvationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ är $\mathbf{x}(t) = C_1 e^t \mathbf{v}_1 + C_2 e^{-2t} \mathbf{v}_2$.

Begynnelsevillkoret är $\mathbf{x}(0) = C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$. Detta medför ekvationen för C_1 och C_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Utvidgad matris till detta system är $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 12 \end{bmatrix}$. Gauss elimination leder till trappstegsmatrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ och värden för $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Lösningen till begynnelsevilkroproblemet är $\mathbf{x}(t) = e^t \mathbf{v}_1 + 2e^{-2t} \mathbf{v}_2$.

Konfigurationen i fasportrett är sadelpunkt. I fall då $C_2 = 0$ går banor mot oändligheten längs linjen genom origo, som är parallell med $\mathbf{v}_1$. Om $C_1 = 0$ går banor mot origo längs linjen genom origo, som är parallell med $\mathbf{v}_2$. Banor i fasplanet mellan dessa linjer för C_1 och C_2 skilda från noll är hypebler som närmar sig ovannämnda räta linjer då tiden går mot ∞ och $-\infty$.

7. **Skalär produkt, ortogonalitet, projektion. Symmetriska och ortogonala matriser.**

Betrakta symmetrisk matris $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Hitta ortonormal bas av egenvektorer till matrisen och diagonalisera A. **(3p)**

b) Ange spektral dekomposition av matrisen A. **(3p)**

Lösning.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$,karakteristiskt polynom $\lambda^2 - 5\lambda - 36$. Egenvärden $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 9$.

egenvektorer: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda - 4$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda = 9$.

Matrisen A är symmetrisk. Detta medför att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala. Det är också lätt att se att $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Normerade egenvektorer är $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Ortogonala transformationsmatris i det fallet är $P = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Dess invers är lika med dess transponat $P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ och är eventuellt lika med själva P.

$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

b) Spektral dekomposition av symmetrisk matris A är följande uttryck:

$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mathbf{w}_i \, \mathbf{w}_i^T$ med ortogonala normerade egenvektorer $\mathbf{w}_i$.I fall med givna symmetriska matrisen 2×2 består summan av två termer

$$A = -4 \, \mathbf{w}_1 \, \mathbf{w}_1^T + 9\mathbf{w}_2 \, \mathbf{w}_2^T = -\frac{4}{13} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} + \frac{9}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$$