MATEMATIK
Chalmers
Kursansvarig: Alexei Heintz

Datum: 2018-01-13 Tid: eftermiddag (kl 14.00-18.00)
Hjälpmedel: inga. **Mobiltelefoner är förbjudna.**
Telefonvakt: Carl Lundholm ankn. 6792

Tenta i MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning. K/Bt/Kf

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

1. **Integraler och primitiva funktoner.**

a) Beräkna $\displaystyle\int x\sin^2(x)dx.$ **(2p)**

b) Beräkna $\displaystyle\int_0^2 \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}.$ **(3p)**

Lösning.

a) $\displaystyle\int x\sin^2(x)dx = \int x\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx = \int \frac{x}{2}dx - \frac{1}{2}\int x\cos(2x)dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\int xd\sin(2x) =$
$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\int \sin(2x)dx =$
$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{4}x\sin 2x + C.$

b)Partiellbråksuppdelning ger: $\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1};$

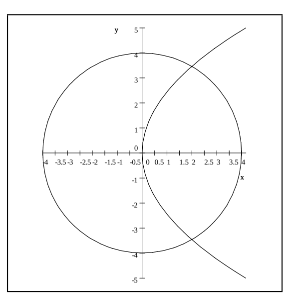
$\int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{2x+1}dx = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y+1}dy = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(2x+1)$

$\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)} = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C$

Integralkalkulenshuvudsats medför: $\int_0^2 \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)} = \left[\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]\Big|_0^2 = \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5$

2. **Tillämpningar av integraler**.

a) Beräkna arean av figuren i halvplanet $x \geq 0$ som är begränsad av två linjer: cirkeln $x^2 + y^2 = 16$ och parabeln $y^2 = 6x$.

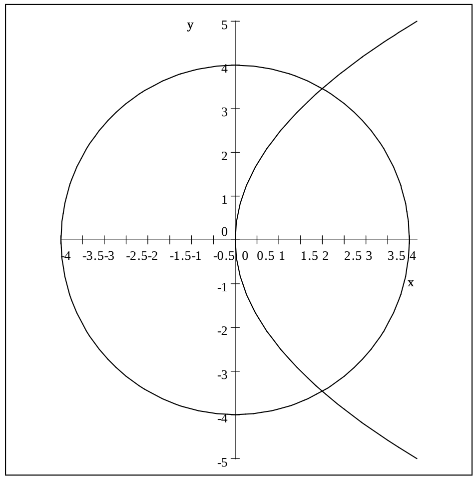


Tips: Det lämpligt att använda variabelbytet av typ $x = a\sin(t)$ i en av integraler som uppstår. **(4p)**

b) Beräkna arean av ytan som är byggd med rotation av grafen till funktionen $y = \sin(x)$ för $x \in [0, \pi]$ runt x - axeln. **(3p)**

Lösning.

a) Skiss av figuren:



Skärningspunkter mellan parabeln och cirkeln bestämmes som lösning till system ekvationer $x^2 + y^2 = 16$ och $y^2 = 6x$.Detta som medför att $x^2 + 6x - 16$, och rötter till det polynomet är $x_1 = 2$ och $x = -8$. Roten $x = -8$ är negativ och finns inte på parabeln.

Bilden är symmetrisk med avseende på x axeln. Det räcker att beräkna arean av halvan av figuren. Intervallet för y inom den figuren är $\left[-\sqrt{6x_1}, \sqrt{6x_1}\right] = \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$. Figuren är symmetrisk med avseende på x - axeln, så det räcker att beräkna hälften av arean. Vi delar upp figuren i två intervall för x:

$Arean = 2\int_0^2 \sqrt{6x} + 2\int_2^4 \sqrt{16 - x^2}dx = I_1 + I_2$

$I_1 = 2\int_0^2 \sqrt{6x} = \frac{8}{3}\sqrt{12} = \frac{16}{3}\sqrt{3}$

$I_2 = 2\int_2^4 \sqrt{16 - x^2}dx;$

Använd variabelbytet $x = 4\sin(t)$, $dx = 4\cos(t)dt$.

$x = 4$ för $t = \pi/2$; $x = 2$ för $t = \pi/6$.

$I_2 = 2\int_2^4 \sqrt{16 - 16\sin^2 t}\,(4\cos(t))\,dt = 32\int_2^4 \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos(t)dt = 32\int_{\pi/6}^{\pi/2} (\cos t)^2\,dt = 32\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}.$

$Arean = I_2 + I_1 = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3} + \frac{16}{3}\sqrt{3} = \frac{16}{3}\pi + \frac{4}{3}\sqrt{3}$

Svar: $Arean = \frac{16}{3}\pi + \frac{4}{3}\sqrt{3}$

b) Beräkna arean av ytan som är byggd med rotation av grafen till funktionen $y(x) = \sin(x)$ för $x \in [0, \pi]$ runt x - axeln.

Svar: $Arean = 2\pi\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right)$

Allmän formel för arean är $Arean = \int_0^\pi 2\pi y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$. För konkreta funktionen $y(x) = \sin(x)$

$Arean = 2\pi\int_0^\pi \sin(x)\sqrt{1 + \cos^2(x)}dx = -2\pi\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2(x)}d(\cos(x)) = -2\pi\int_1^{-1} \sqrt{1 + y^2}dy = 2\pi\int_{-1}^1 \sqrt{1 + y^2}dy$

Betrakta primitiv funktion:

$\int \sqrt{1 + y^2}dy = \frac{1}{2}y\sqrt{y^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$

Tillämpning av integralkalkulens huvudsats ger

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+y^2}dy = \left[\frac{1}{2}y\sqrt{y^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\right]\Big|_{-1}^{1} =$

$\left[\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]-\left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)\right] = \left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$

och medför svaret.

Primitiva funktioner med $\sqrt{1+y^2}$ beräknas vanligen med hjälp av substitutionen $y = \tan(\theta)$:

$I = \int\sqrt{1+y^2}dy = \int\sqrt{1+\tan^2(\theta)}d\tan(\theta) = \int\sqrt{1+\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2\theta)}}\frac{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}d\theta = \int\frac{1}{\cos(\theta)}\frac{1}{\cos^2(\theta)}d\theta =$

$= \int\frac{1}{\cos^3(\theta)}d\theta = \int\sec^3(\theta)d\theta$

Den primitiva funktionen $I = \int\sec^3(\theta)d\theta$ betraktas i Adams i Example 3 i kapitel 6.1 och reduceras där till standarta integralen

$\int\frac{1}{\cos(\theta)}d\theta = \int\sec(\theta)d\theta = \ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|$

med hjälp av partiell integration. Introducera beteckningar:

$$U = \sec(\theta), V = \tan(\theta),\ dU = \sec(\theta)\tan(\theta),\ dV = \sec^2(\theta)d\theta.$$

och använd partiell integration i I:

$I = \int\sec^3(\theta)d\theta = \int UdV = \sec(\theta)\tan(\theta) - \int\sec(\theta)\tan^2(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) - \int\sec(\theta)\left(\sec^2(\theta)-1\right)d$

$=\sec(\theta)\tan(\theta) - I + \int\sec(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) - I + \ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|$

Integralen I löses ut och ger $I = \frac{1}{2}\sec(\theta)\tan(\theta)+\frac{1}{2}\ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|$. Substitutionen av ursprungliga variabler $y = \tan(\theta)$ och $\sec(\theta) = \sqrt{1+y^2}$ ger

$$I = \frac{1}{2}y\sqrt{1+y^2}+\frac{1}{2}\ln\left|y+\sqrt{y^2+1}\right|$$

■

Man kan också beräkna den primitiva funktionen med att göra partiell integeration direkt på integralen $\int\sqrt{1+y^2}dy$

och sedan använda att $\int\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,dy = \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$:

$I = \int\sqrt{1+y^2}dy = y\sqrt{y^2+1} - \int y\,d\left(\sqrt{y^2+1}\right) = y\sqrt{y^2+1} - \int\frac{y^2+1-1}{\sqrt{y^2+1}}\,dy = y\sqrt{y^2+1} -$

$\int\sqrt{y^2+1}dy + \int\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,dy$

$= -I + y\sqrt{y^2+1} + \int\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,dy.$

I löses ut: $2I = y\sqrt{y^2+1} + \int\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,dy$.

Den sista primitiva funktionen är bra att kunna: $\int\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,dy = \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$.

Den är ekvivalent med standarta primitiva funktionen $\int\frac{1}{\cos(\theta)}d\theta = \int\sec(\theta)d\theta = \ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|$ genom samma variabelsubstitution $y = \tan(\theta)$ som ovan:

$\int\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,dy = \int\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}d\left(\tan(\theta)\right) = \int\cos(\theta)\frac{1}{\cos^2(\theta)}d\theta = \int\frac{1}{\cos(\theta)}d\theta = \int\sec(\theta)d\theta =$

$\ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)| = \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$

3. **Differentialekvationer.**

a) Lös begynnelsevärdesproblem: $y' - y\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)}$; $y(0) = 0$. **(3p)**

b) Ange allmän lösning till ekvationen $y'' - 7y' + 6y = \sin(x)$. **(3p)**

Lösning.

a) Ekvationen är linjär av första ordningen på formen $y' + p(x)y = g(x)$ med begynnelsevillkor $y(x_0) = y_0$.

Den löses med hjälp av formeln:

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)ds\right)\left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} p(t)dt\right) ds\right)$$

$p(x) = -\tan(x)$, $g(x) = 1/\cos(x)$, $y(x_0) = 0$.

$\int_{x_0}^{x} p(s)ds = \int_0^x -\tan(s)ds = \ln(\cos x) - \ln(\cos 0) = \ln(\cos x)$

$\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)ds\right) = \exp(-\ln(\cos x)) = \frac{1}{\cos(x)}$

$\int_0^x g(s)\exp\left(\int_0^s p(t)dt\right) ds = \int_0^x \frac{1}{\cos(s)}\exp(\ln(\cos s))\, ds = \int_0^x ds = x$

Svar: $y(x) = \frac{x}{\cos(x)}$.

Andra sätt att lösa samma ekvation är med hjälp av integrerande faktorn. Formeln ovan är bara allmänt svar på samma metod. Vi multiplicerar ekvationen med integrerande faktorn $\exp\left(\int p(x)dx\right) = \exp(\ln(\cos(x)) = \cos(x)$ i det fallet och observerar att det som står i vänster är derivatan av produkt:

$$\left(\frac{d}{dx}y\right)\exp\left(\int p(x)dx\right) + y\cdot p(x)\exp\left(\int p(x)dx\right) = \frac{d}{dx}\left(y\exp\left(\int p(x)dx\right)\right)$$

och ekvationen på den formen

$$\frac{d}{dx}\left(y\exp\left(\int p(x)dx\right)\right) = g(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)$$

löses med integrering av vänser och högerled och tillägg av en godtycklig konstant.

$$y\exp\left(\int p(x)dx\right) = \int g(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)dx + C$$

Efter multiplikation med $\exp\left(-\int p(x)dx\right)$ vi får svaret med en godtycklig konstant C.

$$y = \exp\left(-\int p(x)dx\right)\int g(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)dx + \exp\left(-\int p(x)dx\right)C$$

Konstanten väljes så att y skulle uppfylla begynnelsevillkor. I vår konkret situation exp $\left(\int p(x)dx\right) = \cos(x)$, $g(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ och $\exp\left(-\int p(x)dx\right) = \frac{1}{\cos(x)}$. Detta medför att

$$y(x) \;=\; \frac{1}{\cos(x)}\int dx + C\cos(x) = \frac{x}{\cos(x)} + C\cos(x)$$

Begynnelsevillkoret är $y(0) = 0$ som medför att $C = 0$ och svaret $y(x) = \frac{x}{\cos(x)}$.■

b) $y'' - 7y' + 6y = \sin(x)$.

Karakteristisk ekvation är $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, rötter är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$.

Detta medför att allmän lösning till homogena differentialekvationen $y'' - 7y' + 6y = 0$ är

$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

Rötter till karakteristiska ekvationen är inte lika med $\pm i$.

Detta medför att en partikulär lösning till inhomogena ekvationen kan hittas på formen $y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$.

Vi hittar koefficienterna A och B med att sätta den formeln in i ekvationen.

$-A\sin(x) - B\cos(x) - 7(A\cos(x) - B\sin(x)) + 6(A\sin(x) + B\cos(x)) = (5B - 7A)\cos x + (5A + 7B)\sin x = \sin(x)$

Detta medför ett system ekvationer för A och B.

$-7A + 5B = 0$ and $(5A + 7B) = 1$. Vi skriver det på matris form:

$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, Gauss elimination ger trappstegsformen $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 0 & \frac{74}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$,

Tillbaka substitution ger reducerade trappstegsformen: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{74} \\ 0 & 1 & \frac{7}{74} \end{bmatrix}$. $A = \frac{5}{74}$ och $B = \frac{7}{74}$.

$y_p(x) = \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x$

Svar: Lösningen är $y = \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x + C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

4. **Rank, kolonnrum, nollrum. Lösbarhet av linjära system.**

Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ och vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm dimensionen av kolonnrummet $Col(A)$ och dimensionen av nollrummet $Null(A)$ till A. **(2p)**

b) Bestäm om $\mathbf{b}$ hör till kolonnrummet $Col(A)$ till A. **(2p)**

c) Betrakta transponat A^T av A och ange en bas till dess nollrum $Null(A^T)$. **(2p)**

d) Anänd basen till $Null(A^T)$ och Fredholm satsen för att bevisa att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart. **(2p)**

Lösning.

a) Dimension av kolonnrummet till en matris kallas för matrisens rank och är lika med antalet pivot element. Dimention av nollrummet är lika med antalet fria variabler och är lika med $n - rank$ där n är antalet kolonner. Det är lätt att se att kolonnerna i A är linjärt oberoende: de är två ickeparallella vektorer i $\mathbb{R}^4$. Rank är lika med 2. Nollummet $Null(A)$ består bara av en nollvektor och har dimension noll.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, Gaussian elimination ger trappstegsmatrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.Man ser att kolonnerna i A är linjärt oberoende.

b) Gausselimination på utvidgade matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$, ger $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ som visar att $\mathbf{b}$ hör till kolonnrummet $Col(A)$ till A.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Trappstegsformen till A^T fås med Gauss elimination: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

bas till nullspace $Null(A^T)$: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) Satsen om sambandet mellan ortogonala komplementet $(Col(A))^{\perp}$ till colonnrummet $Col(A)$och nullrummet till transponat matris $Null(A^T)$ säger att $(Col(A))^{\perp} = Null(A^T)$. Detta medför Fredholm satsen som säger att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning om och endast om $\mathbf{b}$ är ortogonal till $Null(A^T)$. Detta följer från att $\mathbf{b}$ är ortogonal till alla basvektorer i $Null(A^T)$: både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ i vårt fall. Vi testar detta:

$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$; $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. Systemet är lösbart enligt Fredholms sats.

(8p)

5. **Linjära transformationer.**

Ange standard matris till linjär transformation från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som utgör först spegling i linjen $x = y$ i planet och sedan rotation moturs runt origo i vinkel $\pi/3$. **(4p)**

Lösning.

Standardmatris till transformation T har kolonner som är bilder av basvektorer $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$.

Transformationen av $\mathbf{e}_1$ ger först $\mathbf{e}_2$ efter speglingen. Rotation av $\mathbf{e}_2$ i vinkel $\pi/3$ (60 grader) ger vektorn $\begin{bmatrix} \cos(\pi 5/6) \\ \sin(\pi)5/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Transformationen av $\mathbf{e}_2$ ger först $\mathbf{e}_1$ efter speglingen. Rotation av $\mathbf{e}_1$ i vinkel $\pi/3$ (60 grader) ger vektorn $\begin{bmatrix} \cos(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

Standardmatrisen är $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

6. **Egenvektorer, egenvärden, diagonalisering. System linjära ODE.**

a) Bestäm om matriser $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$, och $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, kan diagonaliseras och i så fall ange motsvarande diagonalmatris och transformationsmatris. **(4p)**

b) Betrakta systemet ODE: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ med $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$. Ange allmän lösning och skissa fasportrett.

Bestäm lösningen som uppfyller begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$. **(4p)**

Lösning.

a) matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$, har karakteristiskt polynom: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, eigenvektorer: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = -2$. Egenvärden är olika, detta medför att egenvektorer måste vara linjärt oberoende.

Det är lätt att se i det fallet med två vektorer $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ att de är linjärt oberoende: icke paralella här.

Matrisen A diagonaliseras med matrisen $P = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, nämligen $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Matrisen $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, har karakteristiskt polynom: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$,egenvärdet är $\lambda = 3$ och har multiplicitet 2.

Det finns bara en linjärt oberoende egenvektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ som är lösningen till ekvationen $(B - 3I)\mathbf{w}{=}\mathbf{0}$, eller $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Enligt satsen om tillräckligt och nödvändigt kriterium för diagonaliserbara matriser matrisen B kan inte diagonaliseras

b) Allmän lösning till ekvationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ är $\mathbf{x}(t) = C_1 e^t \mathbf{v}_1 + C_2 e^{-2t} \mathbf{v}_2$.

Begynnelsevillkoret är $\mathbf{x}(0) = C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$. Detta medför ekvationen för C_1 och C_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Utvidgad matris till detta system är $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 12 \end{bmatrix}$. Gauss elimination leder till trappstegsmatrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ och värden för $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Lösningen till begynnelsevilkroproblemet är $\mathbf{x}(t) = e^t \mathbf{v}_1 + 2e^{-2t} \mathbf{v}_2$.

Konfigurationen i fasportrett är sadelpunkt. I fall då $C_2 = 0$ går banor mot oändligheten längs linjen genom origo, som är parallell med $\mathbf{v}_1$. Om $C_1 = 0$ går banor mot origo längs linjen genom origo, som är parallell med $\mathbf{v}_2$. Banor i fasplanet mellan dessa linjer för C_1 och C_2 skilda från noll är hypebler som närmar sig ovannämnda räta linjer då tiden går mot ∞ och $-\infty$.

7. **Skalär produkt, ortogonalitet, projektion. Symmetriska och ortogonala matriser.**

Betrakta symmetrisk matris $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Hitta en ortogonal matris som transformerar matrisen A till en diagonal matris. **(3p)**

b) Ange spektral dekomposition av matrisen A. **(3p)**

Lösning.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$,karakteristiskt polynom $\lambda^2 - 5\lambda - 36$. Egenvärden $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 9$.

egenvektorer: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda - 4$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda = 9$. Matris A är symmetrisk. Detta medför att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala. Det är och så lätt att se att $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Normerade egenvektorer är $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$och $\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Ortogonala transformationsmatris i det fallet är $P = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Dess invers är lika med dess transponat $P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ och är eventuellt lika med själva P.

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

b) Spektral dekomposition av symmetrisk matris A är uttryck

$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ \mathbf{w}_i \ \mathbf{w}_i^T$ med ortogonala normerade egenvektorer $\mathbf{w}_i$.I fall med givna matrisen 2×2 består summan av två termer

$A = -4 \ \mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_1^T + 9\mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_2^T = -\frac{4}{13} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} + \frac{9}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$

8. **Sats.**

Formulera och bevisa integralkalkulens huvudsats. **(6p)**

Maxpoäng på tentan är 50.

Betyggränser för poäng på tentamen, inklusive eventuella bonuspoäng är: **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40

Formelblad

Trigonometri

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y);$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right);$

$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(x);$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)};$$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos x(x-y) + \cos(x+y)\right);$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2};$$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos x(x-y) - \cos(x+y)\right);$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2};$$

Binomialsatsen (lämpliga speciella fall)

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;$

Konjugatregeln

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1-k)}\, b^k;$$

T.ex. är

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$