MATEMATIK | Datum: 2018-08-27 | Tid: eftermiddag (kl 14.00-18.00)
Chalmers | Hjälpmedel: inga. **Mobiltelefoner är förbjudna.**
Kursansvarig: Alexei Heintz | Telefonvakt: Carl Lundholm ankn. 6792

Lösningsförslag till tenta i MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning.
K/Bt/Kf

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

1. **Integraler och primitiva funktoner.**

a) Beräkna $\int x^3 \exp(-x^2)dx.$ **(3p)**

b) Beräkna $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}dx$ **(3p)**

Lösning.

1. a) $\int x^3 \exp(-x^2)dx = \frac{1}{2}\int x^2 \exp(-x^2)d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}\int y\exp(-y)dy = -\frac{1}{2}\int yd\left(\exp(-y)\right) =$
$-\frac{1}{2}y\exp(-y)+\frac{1}{2}\int \exp(-y)dy = \frac{1}{2}y\exp(-y)-\frac{1}{2}\exp(-y) = -\frac{1}{2}x^2\exp(-x^2)-\frac{1}{2}\exp(-x^2)$

1. b) Partiellbråksuppdelning ger:

$\frac{x}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} = \frac{\left(B+C+Ax+Bx+Ax^2+Cx^2\right)}{(x^2+1)(x+1)}$

$B+C=0;\ A+B=1;\ A+C=0.$

$C=-A;\ B=-C=A;\ 2A=1;$

$A=\frac{1}{2};\ B=\frac{1}{2};\ C=-\frac{1}{2}.$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{1}{2}\frac{(x+1)}{x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)}$$

Primitivfunktion:

$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x^2+1}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2(x+1)}\right)dx =$$
$$\frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)$$

Integralkalkulenshuvudsats medför:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}dx = \int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2(x+1)}\right)dx =$$
$$\left(\frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2$$

2. **Tillämpningar av integraler**.

a) Beräkna arean av rotationsyta byggd med rotation av kurvan $y=x^3$ för $0\le x\le 1$ runt x-axeln. **(3p)**

b) Beräkna volumen av rotationskroppen som är byggd med att rotatera runt x - axeln begränsade figuren mellan parabeln $y = x^2 + 1$ och linjen $y = 3x - 1$. **(3p)**

Lösning.

2. a) Allmän formel för arean är:

$$S = 2\pi \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

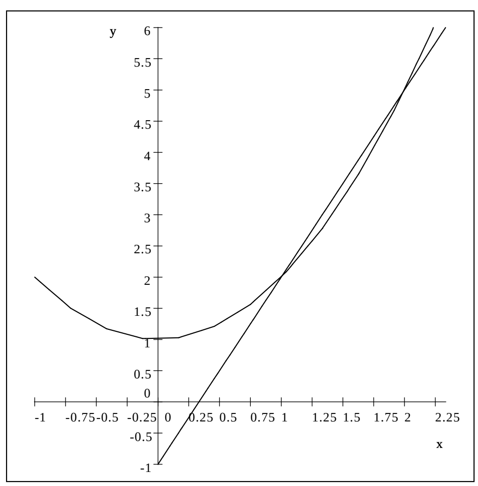
För givna figuren vi får

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{4} \sqrt{1 + 9x^4} d\left(x^4\right) = \frac{1}{2}\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 9s} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + 9s} ds &= \frac{1}{9} \int \sqrt{1 + 9s} d(9s) = \frac{1}{9} \int \sqrt{1 + 9s} d(1 + 9s) \\ &= \frac{1}{9} \int \sqrt{Q} dQ = \frac{2}{27} Q^{3/2} = \frac{2}{27} (1 + 9s)^{3/2} = \frac{2}{27} (1 + 9s)^{3/2} \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2}\pi \frac{2}{27} \left[(1 + 9s)^{3/2} \right] \Big|_0^1 = \frac{\pi}{27} \left[10\sqrt{10} - 1 \right]$$

2. b) Skiss av figuren:



Skärningspunkter mellan parabeln och linjen kan bestämmas som lösningar till ekvationssystemet $y = x^2 + 1$ och $y = 3x - 1$.

Detta medför att $x^2 + 1 = 3x - 1$, och lösningar till den ekvationen är $x_1 = 1$ och $x = 2$. Se på bilden att begränsade figuren mellan raka linjen och parabeln svarar mot $1 \leq x \leq 2$. Volumen kan framställas med hjälp av formeln med skivor:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [r_1(x)]^2 - [r_2(x)]^2\, dx = \pi \int_1^2 \left[(3x-1)^2 - \left(x^2+1\right)^2 \right] dx \\
&= \pi \int_1^2 \left[\left(9x^2 - 6x + 1\right) - \left(2x^2 + x^4 + 1\right) \right] dx \\
&= \pi \int_1^2 \left(7x^2 - 6x - x^4\right) dx = \pi \left(\frac{7}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right) \Bigg|_1^2 = \frac{17}{15}\pi
\end{aligned}
$$

Termerna beräknade separat ser ut som: $\pi \int_1^2 (3x-1)^2\, dx = 13\pi$; $\pi \int_1^2 \left(x^2+1\right)^2 dx = \frac{178}{15}\pi$

3. **Differentialekvationer.**

a) Lös begynnelsevärdesproblem: $y' = \dfrac{\exp(y)}{x}$; $y(1) = 0$. **(2p)**

b) Ange allmän lösning till ekvationen $y'' + y = \sin(x)$. **(3p)**

Lösning.

a) Ekvationen har separabla variabler och löses med att integrera uttrycket $\exp(-y)dy = \dfrac{dx}{x}$: $\displaystyle\int \exp(-y)dy = \int \frac{dx}{x}$.

$-\exp((-y) = \ln x + C$. Begynnelsevillkor $x = 1$, $y = 0$ insatta i den ekvationen ger: $-1 = 0 + C$ och $C = -1$.

Detta ger $\exp(-y) = 1 - \ln(x)$ och svaret: $y = -\ln(1 - \ln(x))$

b) $y'' + y = \sin(x)$.

Karakteristisk ekvation är $\lambda^2 + 1 = 0$, rötter är $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Detta medför att allmän lösning till homogena differentialekvationen $y'' + y = 0$ är

$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Rötter till karakteristiska ekvationen är $\pm i$.

Detta medför att en partikulär lösning till inhomogena ekvationen kan hittas på formen $y_p(x) = x\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right)$.

Vi hittar koefficienterna A och B med att sätta den formeln in i ekvationen.

$y_p(x) = x\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right)$

$y_p'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(x\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right)\right) = A\cos x + B\sin x + Bx\cos x - Ax\sin x$

$y_p''(x) = \dfrac{d^2}{dx^2}\left(x\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right)\right) = 2B\cos x - 2A\sin x - Ax\cos x - Bx\sin x$

Resultatet av insättningen är ekvationen: $-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x$.

Detta medför att $A = -1/2$ och $B = 0$ och $y_p(x) = -\dfrac{1}{2}x\cos(x)$.

Svar: Lösningen är $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos(x)$

4. **Matriser och linjära system. Kolonnrum, nollrum.**

Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm om $\mathbf{b}$ hör till kolonnrummet $Col(A)$ till A. **(2p)**

b) Bestäm dimensionen av kolonnrummet $Col(A)$ och dimensionen av nollrummet $Null(A)$ till A. **(2p)**

c) Betrakta transponat A^T av A och ange en bas till dess nollrum $Null(A^T)$. **(3p)**

Lösning.

a) Systemet $Ax = \mathbf{b}$ testar om vektorn $\mathbf{b}$ kan framställas som linjär kombination av kolonner i A (och hör då till $Col(A)$).

Gausselimination på utvidgade matrisen för systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ger:

$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ger $\overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, som visar att tredje ekvationen i transformerade systemet: $0 = -2$ har ingen lösning. Systemet är inte lösbart och $\mathbf{b}$ hör inte till kolonnrummet $Col(A)$ av A.

b) Dimension av kolonnrummet till en matris kallas för matrisens rank och är lika med antalet pivot element i matrisen. Dimensionen av nollrummet är lika med antalet fria variabler i homogena systemet $Ax = 0$ och är lika med $n - \text{rank(A)}$ där n är antalet kolonner. Så det räcker att bestämma bara rank.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{Gauss} \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 5 & 15 & 10 \\ 15 & 10 & -5 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{Gauss} \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & -14 & -14 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{Gauss} \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{Gauss} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{Gauss} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det finns en fri variabel. Matrisens rank är lika med två och nollrummet har dimension 1.

c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

$Null(A^T)$ består av alla lösningar till homogena ekvationen $A^T\mathbf{x} = 0$. Trappstegsformen till A^T fås med hjälp av Gauss elimination:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 40 & 15 & 10 & 5 \\ 15 & 10 & -5 & 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -14 & -3 \\ 0 & 7 & -14 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{Gauss}{\curvearrowright}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi observerar från trappstegsformen att det finns två fria variabler i homogena systemet $A^Tx = 0$: x_3 och x_4. Bas till nullspace $Null(A^T)$: kan fås med att välja en av fria variabler lika med noll och annan lika med en konstant skild från noll och sedan tvärtom. Dessa två lösningar ger basvektorter till

$$Null(A^T) : \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

5. **Linjära transformationer.**

Ange standard matris till linjär transformation från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som utgör först rotation moturs runt origo i vinkel $\pi/4$ och sedan vektorprojektion på x - axeln. **(4p)**

Lösning.

Standardmatris till transformation T har kolonner som är bilder av basvektorer $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$.

Rotation av $\mathbf{e}_1$ i vinkeln $\pi/4$ (45 grader) ger vektorn $\begin{bmatrix} \cos(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

Projektion av $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ på x - axeln ger vektron $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Rotation av $\mathbf{e}_2$ i vinkeln $\pi/4$ (45 grader) ger vektorn $\begin{bmatrix} \cos(3\pi/4) \\ \sin(3\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

Projektion av $\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ på x - axeln ger vektron $\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Standardmatrisen är $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. **Egenvektorer, egenvärden, diagonalisering. System linjära ODE.**

a) Formulera ett tillräckligt och nödvändigt kriterium för diagonaliserbara matriser. Bestäm om matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar och i så fall ange motsvarande diagonalmatris. **(4p)**

b) Betrakta systemet ODE: $\mathbf{x}' = B\mathbf{x}$ med $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Ange allmän lösning.

Bestäm lösningen som uppfyller begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. **(4p)**

Lösning.

a) Matris A med storlek $n \times n$ är diagonaliserbar om och endast om den har n linjärt oberoende egenvektorer (Sats 5.3.5, s. 300 i Lay).

Givna matrisen A har karakteristiskt polynom: $\lambda^3 - \lambda^2 - 9\lambda + 9$. Det är lätt att gissa dess rötter som är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$. Matrisen A har tre olika egenvärdem, som måste då ha linjärt oberoende egenvektorer. Detta medför att matrisen A har tre linjärt oberoende egenvektorer och är diagonaliserbar. Den är similär med en diagonal matris D så att $D = P^{-1}AP$, till exempel $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Transformationsmatrisen P har kolonner som är linjärt oberoende egenvektorer. Position av diagonala element i D beror på ordningen i vilken man placerar egenvektorer i transformationsmatrisen P

b) Matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, har karakteristiskt polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$ och egenvärden $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$. Den har två linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, som är lösningar till system $(A - \lambda_1 I)\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0$ och $(A - \lambda_2 I)\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0$.

Allmän lösning till systemet av differentialekvationer $\mathbf{x}' = B\mathbf{x}$ är $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{-t}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{5t}\mathbf{v}_2$.

Begynnelsevillkoret är $\mathbf{x}(0) = C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. Den vektorekvation är ekvivalent med ekvationssystemet för C_1 och C_2: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Det har entydig lösning $C_1 = 1$, $\mathrm{C}_2 = 2$. Lösningen till begynnelsevillkroproblemet är $\mathbf{x}(t) = e^{-t}\mathbf{v}_1 + 2e^{5t}\mathbf{v}_2$.

7. **Skalär produkt, projektion, Gram - Schmidt metoden.**

   Bestäm en ortogonal bas till spannet av följande vektorer:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4p)}$$

Lösning.

Vi använder Gram Schmid metoden: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{p}_1\,(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\,/\,\|\mathbf{p}_1\|^2$, $\mathbf{p}_3 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{p}_1\,(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{v}_3)\,/\,\|\mathbf{p}_1\|^2 - \mathbf{p}_2\,(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{v}_3)\,/\,\|\mathbf{p}_2\|^2$. Sedan normeras vektorer $\mathbf{p}_i$: $\mathbf{q}_i = \mathbf{p}_i/\,\|\mathbf{p}_i\|$.

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{2}{4} \right) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\|\mathbf{p}_2\|^2} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{2}{4} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{(-4)}{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Vektorer $\mathbf{p}_2$ och $\mathbf{p}_3$ är redan normerade. Vi normerar vektorn $\mathbf{p}_1$ och får sökta ortonormala basen:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

8. **Minstakvadratmetoden.**

Anpassa följande experimentella data för x och y:

$$\begin{bmatrix} x: & 0 & 1 & 2 & 4 \\ y: & -1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

med en rät linje: $y = b + ax$ med hjälp av minstakvadratmetoden. **(4p)**

Vi vill att parametrar a och b skulle uppfylla följande ekvationssystem:

$\begin{cases} b + a \cdot 0 = -1 \\ b + a \cdot 1 = 1 \\ b + a \cdot 2 = 3 \\ b + a \cdot 4 = 3 \end{cases}$ som är ekvivalent med följande system på matris form: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

med matris $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, högerledet $g = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ och okända vektorn $x = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$

Systemet är tydligen olösbart (innehåller för många ekvationer) och vi söker en minstakvadratlösning $\widehat{x}$ istället. Vi betraktar normalekvationen

$$A^T A \widehat{x} = A^T g$$

som ger minstakvadratlösningen $\widehat{x}$. Den är projektionen av g på $Col(A)$. Vi beräknar termer i den ekvationen:

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Utvidgade matrisen som svarar mot normnalekvationen $\left(A^T A\right)\widehat{x} = A^T g$ är: $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 7 & 21 & 19 \end{bmatrix}$.

Man kan använda Cramers regel för att få fram lösning till ekvatiossystemet med två okända variabler.

$\det A^T A = \det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} = 35$; $\det \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 19 & 21 \end{bmatrix} = -7$; $\det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 19 \end{bmatrix} = 34$

$\widehat{x}_1 = b = -\dfrac{7}{35} = -\dfrac{1}{5}$; $\widehat{x}_2 = a = \dfrac{34}{35}$.

Man kan också tillämpa Gauss elimination till utvidgade matrisen med samma resultat:

$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 7 & 21 & 19 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 0 & 35 & 34 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{34}{35} \end{bmatrix}$; $b = -\frac{1}{5}$; $a = \frac{34}{35}$

som medför approximationen $y = -\frac{1}{5} + \frac{34}{35}x$.$\blacksquare$

9. **Sats.**

   Bevisa att matris A är inverterbar om och endast om A är radekvivalent med en enhetsmatris. **(6p)**

Kolla beviset till Sats 2.2.7, s. 325 i Lay.

Maxpoäng på tentan är 50.

Betyggränser för poäng på tentamen, inklusive eventuella bonuspoäng är: **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40