MATEMATIK	Datum: 2019-08-26	Tid: eftermiddag (kl 14.00-18.00)
Chalmers	Hjälpmedel: inga. **Mobiltelefoner är förbjudna.**	
Kursansvarig: Alexei Heintz	Telefonvakt: Olof Giselsson	ankn. 5325

Lösningar till tenta i MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning. K/Bt/Kf

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

1. **Integraler och primitiva funktoner.**

   a) Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)}dx$ **(3p)**

   Lösning.

   Rationella funktioner integreras med hjälp av partielbråksuppdelning. Nämnaren har stärre grad än täljaren. Partiellbråksuppdelning har formen

   $\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x-1)} = \frac{A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)}$

   $A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2 = C - B - A + Bx + 2Cx + Ax^2 + Cx^2 = (C-B-A) + x\,(B+2C) + x^2\,(A+C) = x^2+2$

   För att ha likheten för alla x måste koefficienterna vid samma gradar av x vara like i höger och vänster.

   $C - B - A = 2;\ B + 2C = 0;\ A + C = 1$

   Två sista ekvationer användes för att ge $B = -2C$ och $A = 1 - C$. Detta medför enekvation för C: $C - (-2C) - (1 - C) = 2$ och $C = 3/4$,

   $B = -3/2,\ \ A = 1/4.$

   $\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{3}{2(x+1)^2}$

   $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)}dx = \int \frac{3}{4(x-1)}dx + \int \frac{1}{4(x+1)}dx - \int \frac{3}{2(x+1)^2}dx = \frac{3}{4}\ln(x-1) + \frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{3}{2x+2} + C.\blacksquare$

   b) Beräkna $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)dx.$ **(3p)**

   Lösning.

   Vi integrerar partiellt två gånger för att få fram samma integral med annan koefficient framför och lösa ut integralen från ekvationen som uppstår.

   $\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{1}{b}(\sin bx)\,e^{ax} - \int \frac{a}{b}(\sin bx)\,e^{ax}\,dx = \frac{1}{b}(\sin bx)\,e^{ax} + \frac{a}{b^2}(\cos bx)\,e^{ax} - \frac{a^2}{b^2}\int(\cos bx)\,e^{ax}\,dx$

   $\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{1}{b}(\sin bx)\,e^{ax} + \frac{a}{b^2}(\cos bx)\,e^{ax}$

   $\int e^{ax}\cos(bx)dx = e^{ax}\left[\frac{1}{b}(\sin bx) + \frac{a}{b^2}(\cos bx)\right]\left(\frac{b^2}{b^2+a^2}\right) + C = e^{ax}\left[b\,(\sin bx) + a\,(\cos bx)\right]\left(\frac{1}{b^2+a^2}\right) + C.\blacksquare$

2. **Tillämpningar av integraler**.

   a) Beräkna arean mellan kurvor $y^2 = 2px$ och $x^2 = 2py$, där $p > 0$. **(3p)**

Lösning.

Vi söker först intervallet i x - variablen som svarar mot sökta arean. Vi söker skärningspunkter med att lösa ekvationen $x^2 = 2p\sqrt{2px}$.Den har lösningar $x = 0$ och en $x = 2p$. Vi får andra lösningen med att dela ekvationen med$\sqrt{x}$ som medför $x^{1.5} = (2p)^{1.5}$
.

Arean befinner sig mellan givna kurvor med $x \in [0, 2p]$ så att kurvan $x^2 = 2py$ ligger under kurvan $y^2 = 2px$.

$A = \int_0^{2p} \left[\sqrt{2px} - \frac{1}{2p} x^2 \right] dx = \left[\sqrt{2p} \frac{x^{3/2}}{(3/2)} - \frac{1}{2p} \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^{2p} = \left[\sqrt{2p} \frac{(2p)^{3/2}}{(3/2)} - \frac{1}{2p} \frac{(2p)^3}{3} \right] =$
$p^2 \left[\sqrt{2} \frac{(2)^{3/2}}{(3/2)} - \frac{1}{2p} \frac{(2p)^3}{3} \right] = p^2 \left[\frac{8}{3} - \frac{4}{3} \right] = \frac{4}{3} p^2 . \blacksquare$

Figuren är symmetrisk med avseende på linjen $y = x$. Vi kan beräkna hälften av arean kanske lite enklare.

$A = 2 \int_0^{2p} \left[\sqrt{2px} - x \right] dx = 2 \left[\sqrt{2p} \frac{x^{3/2}}{(3/2)} - \frac{x^2}{2} \right] \Big|_0^{2p} = 2 \left[\sqrt{2p} \frac{(2p)^{3/2}}{(3/2)} - \frac{(2p)^2}{2} \right] = 2p^2 \left[\frac{8}{3} - 2 \right] =$
$\frac{4}{3} p^2$

b) Beräkna volumen av rotationskroppen som är byggd med att rotera kurvan $y = \frac{a}{2} \left(e^{x/a} + e^{-x/a} \right)$ runt $x-$ axeln med begränsning $x \in [0, b]$ och $a, b > 0$. **(3p)**

Lösning. Allmän formel för volum byggd med roterande kurvan $y = f(x) > 0$ över intervallet $[a, b]$ är $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

$V = \pi \frac{a^2}{4} \int_0^b \left(e^{x/a} + e^{-x/a} \right)^2 dx = \pi \frac{a^2}{4} \int \left(e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a} \right) dx : \pi \frac{a^2}{4} \frac{1}{2} \left(a e^{\frac{2}{a} x} - a e^{-\frac{2}{a} x} + 4x \right) \Big|_0^b =$
$\frac{\pi a^2}{8} \left(4b - a e^{-\frac{2}{a} b} + a e^{\frac{2}{a} b} \right) . \blacksquare$

3. **Differentialekvationer.**

a) Lös begynnelsevärdesproblemet och bestäm intervallet i x där lösningen är definierad:

$$y' = xy^2; \quad y(1) = 2$$

. **(3p)**

Lösning.

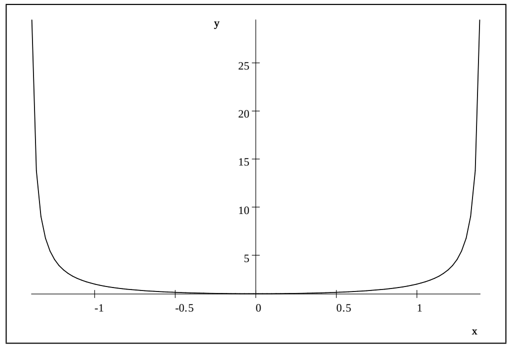
Ekvationen har separabla variabler. $\frac{dy}{dx} = xy^2$.

$\frac{dy}{y^2} = xdx; \;\; \int \frac{dy}{y^2} = \int xdx; \; -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C;$

Berynnelsevillkoret ger oss värdet för konstanten C. $-\frac{1}{y(1)} = \frac{1^2}{2} + C; \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = C = -1$

$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} - 1;$

$$y(x) = \frac{1}{1 - x^2/2}$$



Lösningen $y(x)$ existerar bara på öppna intervallet $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ eftersom $f(x) \to \infty$ då $x \to \pm\sqrt{2}$■

b) Ange allmän lösning till ekvationen

$y'' + 4y = \cos(2x)$. **(3p)**

Lösning.

Karakteristisk ekvationär $\lambda^2+4 = 0$. $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.Allmän lösning till homogena ekvationen $y'' + 4y = 0$ är $y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

Allmän lösning till givna inhomogena ekvationen är summa av $y_h(x)$ och en godtycklig lösning $y_p(x)$ till inhomogena ekvationen.

Högerledet i ekvationen ä lösning till homogena ekvationen. Detta gör att vi söker $y_p(x)$ på formen $y_p(x) = x\,(A\cos(2x) + B\sin(2x))$ där A och B väljas så att det uttrycket uppfyller ekvationen.

$\frac{d}{dx}\left(x\,(A\cos(2x) + B\sin(2x))\right) = A\cos 2x + B\sin 2x + 2Bx\cos 2x - 2Ax\sin 2x$

$\frac{d^2}{dx^2}\left(x\,(A\cos(2x) + B\sin(2x))\right) = 4B\cos 2x - 4A\sin 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x$

$4B\cos 2x - 4A\sin 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x + 4x\,(A\cos(2x) + B\sin(2x)) = 4B\cos 2x - 4A\sin 2x = \cos(2x)$

Vi måste ha $A = 0$ och $4B = 1$ för att uppfylla ekvationen.

Detta ger $y_p(x) = \frac{x}{4}\sin(2x)$ och $y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{x}{4}\sin(2x)$.■

4. **Matriser och linjära system. Kolonnrum, nollrum.**

Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ och vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

a) Bestäm om systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart och om detta stämmer, ange alla lösningar. **(2p)**

b) Ange en bas till kolonnrummet $Col(A)$ och dimensionen av nollrummet $Nul(A)$ till A. **(2p)**

c) Använd svaret till a) för att ange om $\mathbf{b}$ är ortogonal mot $Nul(A^T)$ där A^T är transponat av A utan att beräkna $Nul(A^T)$. **(2p)**

Lösning.

i) Betrakta utvidgade matrisen som svarar systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och genomför Gausselimination:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & -4 & 10 \\ 0 & -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och till matrisen på reducerad trappstegsform: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ som visar att systemet har en fri variabel och har oändligt mäga lösningar som ligger på ett linje $\begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ med godtyckliga reella t.

ii) Bas till kolonnrummet $Col(A)$ kan väljas som pivot kolonner i A: $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$. Dimensionen av $Col(A)$ är då lika med 2. Dimensionen av nolrummet är $1 = 3 - 2$ enligt ranksatsen.

iii) Fredholm satsen påstår att $Nul(A^T)$ är ortogonala komplementet till $Col(A)$. Detta medför att $\mathbf{b}$ är ortogonal mot $Nul(A^T)$ eftersom systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart och detta betyder att $\mathbf{b} \in Col(A)$. ■

5. **Linjära transformationer.**

Ange standard matris till en linjär transformation från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som utgör först spegling i linjen $y = x$ och sedan rotation medurs runt origo i vinkeln 30°. **(4p)**

Lösning.

Satsen om standard matris till en linjär avbildning T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ säger att standard matris har kolonner som av värden $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)...T(\mathbf{e}_n)$, som avbildningen T antar på vektorer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ som är kolonner i enhetsmatrisen I_n.

I vårt fall är det vektorer $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sökta standardmatris har formen $[T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)]$. Vi beräknar $T(\mathbf{e}_1)$ och $T(\mathbf{e}_2)$.

Spegling av vektorn $\mathbf{e}_1$ i linjen $y = x$ ger vektorn $\mathbf{e}_2$. Rotationen av vektorn $\mathbf{e}_2$ medurs runt origo i vinkeln 30° ger vektorn $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$.

Spegling av vektorn $\mathbf{e}_2$ i linjen $y = x$ ger vektorn $\mathbf{e}_1$. Rotationen av vektorn $\mathbf{e}_1$ medurs runt origo i vinkeln 30° ger vektorn $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

Detta ger standardmatris på formen $\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ ■

6. **Egenvektorer, egenvärden, diagonalisering. System linjära ODE.**

a) Formulera ett tillräckligt och nödvändigt kriterium för att kunna diagonalisera en matris.

Betrakta matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Bestäm om matrisen B är diagonaliserbar och i så fall ange motsvarande diagonalmatris D och matrisen P sådan att $P^{-1}BP = D$. **(4p)**

Lösning.

En kvadratisk $n \times n$ matris är diagonaliserbar om och endast om den har n linjärt oberoende egenvektorer.

Karakteristiskt polynom är $p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 3\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2 (3 - \lambda)$.

Vi fick ett multipelt egenvärde $\lambda_{1,2} = 0$ och ett enkelt $\lambda_3 = 3$. Vi kollar hur många linjärt oberoende egenvektorer som matrisen B har. Egenvektorer som svarar olika egenvärden är lihnjärt oberoende. Det räcker då att kolla hur många linjärt oberoende egenvektorer som svarar mot egenvärdet $\lambda = 0$ eller hur måga linjärt oberoende lösningar som systemet$(B - 0I)\,\mathbf{x} = B\mathbf{x} = 0$ har. Använd Gausselimination.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det finns bara en fri variabel, som betyder att alla egenvektorer $\mathbf{v}$ till $\lambda = 0$ ligger på samma linje genom origo: $\mathbf{v} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ med godtyckligt $t \neq 0$. Det finns bara en linjärt oberoende vektor till $\lambda = 0$.

Vi kollar för säkerhets skull hur många linjärt oberoende egenvektorer som svarar mot egenvärdet $\lambda = 3$ eller hur måga linjärt oberoende lösningar som systemet$(B - 3I)\,\mathbf{x} = 0$ har. Använd Gausselimination.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser på samma sätt som innan att det finns bara en fri variabel och bara en linjärt oberoende egenvektor till $\lambda = 3$.

Vi ser att matrisen B har bara två linjärt oberoende egenvektorer och är inte diagonaliserbar.$\blacksquare$

b) Betrakta systemet ODE: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ med matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Bestäm allmän lösning till systemet ODE. Bestäm lösningen som uppfyller begynnelsevilkoret $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. **(4p)**

Lösning.

Vi söker egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ och hoppas att hitta en bas av egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ med egenvärden λ_1, λ_2 (kanske likadana) så att allmän lösning kan representeras på formen $\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$.

Karakteristiskt polynom är $\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2-(2+4)\lambda+\det(A) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$.

Egenvärden är rötter till $\lambda^2 - 6\lambda + 5$. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Egenvektorer som svara mot olika egenvärden måste vara linjärt oberoende.

Ekvationssystem77 $(A - 1I)\mathbf{v}_1 = 0$ och $(A - 5I)\mathbf{v}_2 = 0$ måste lösas.

$\lambda_1 = 1$: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = 0 \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = 5$: $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = 0 \Longrightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Allmän lösning till systemet ODE har formen $\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{v}_1 e^t + C_2\mathbf{v}_2 e^{5t}$.

Lösningen som uppfyller begynnelsevillkoret ovan, uppfyller vektorekvationen $C_1\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Vi använder Gausselimination för att lösa ut C_1 och C_2.

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. $C_2 = -0.5$, $C_1 = 0.5$.

$$\mathbf{x}(t) = 0.5\mathbf{v}_1 e^t - 0.5\mathbf{v}_2 e^{5t} = 0.5\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^t - 0.5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} = \begin{bmatrix} 1.5e^t - 0.5e^{5t} \\ -0.5e^t - 0.5e^{5t} \end{bmatrix}. \blacksquare$$

7. **Skalär produkt, projektion, Gram - Schmidt metoden.**

a) Bestäm en ortogonal bas till spannet Span $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ av följande vektorer:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ **(4p)**

b) Bestäm en ortonormal bas till Span $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ och ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ på Span $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Lösning.

a) Vi använder Gram-Schmid metoden med att välja ortogonal bas på formen

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ och $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1(\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)/(|\mathbf{v}_1|^2)$.

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) / \left(1^2 + 1^2 + 0^2\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Projektionen av en vektor $\mathbf{w}$ på ett underrum $\mathcal{L}$ med ortonormal bas $\widetilde{\mathbf{u}}_1$, $\widetilde{\mathbf{u}}_2$, ...,$\widetilde{\mathbf{u}}_m$ är lika med $\Pr(\mathbf{w}) = \widetilde{\mathbf{u}}_1(\widetilde{\mathbf{u}}_1 \cdot w) + ... + \widetilde{\mathbf{u}}_m(\widetilde{\mathbf{u}}_m \cdot w)$.

Vi inför en ortonormal bas till Span $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ med att normera vektorer $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$: $\widetilde{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{u}_1/\left|\mathbf{u}_1\right|$, $\widetilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{u}_2/\left|\mathbf{u}_2\right|$

$$\widetilde{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \widetilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Pr(\mathbf{w}) = \widetilde{\mathbf{u}}_1(\widetilde{\mathbf{u}}_1 \cdot w) + \widetilde{\mathbf{u}}_2(\widetilde{\mathbf{u}}_2 \cdot w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

8. **Minstakvadratmetoden.**

Anpassa följande experimentella data för x och y:

$$\begin{bmatrix} x\colon & 1 & 2 & 4 & 5 \\ y\colon & -1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

med en linje: $y = a + bx$ med hjälp av minstakvadratmetoden. **(4p)**

Lösning.

Anpassing av experimentella data med en rät linje formuleras som ekvationssystemet

$$X \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{b}; \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi söker minstakvadratlösning till detta (olösbart) system genom att lösa normala ekvationen

$$\left(X^T X\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = X^T \mathbf{b}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 46 \end{bmatrix}$$

$$X^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 35 \end{bmatrix}$$

Vi tillämpar Gausselimination till normalekvationen:

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 12 & 46 & 35 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 0 & 10 & 11 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 11 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 10 & 30 & 20 \\ 0 & 30 & 33 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 10 & 0 & -13 \\ 0 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

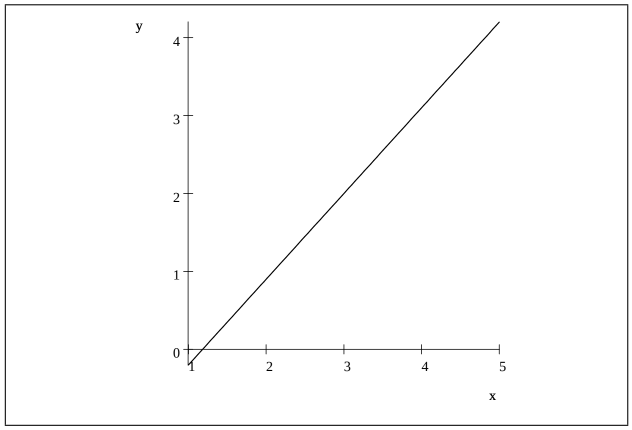
$a = -13/10, \ \ b = 11/10.$

Normalekvationen kan lösas också med hjälp av Kramers formler:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 46 \end{bmatrix} \right) = 40.$$

$$a = 1/\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 46 \end{bmatrix}\right)\det\begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 35 & 46 \end{bmatrix} = -52/40 = -\frac{13}{10}$$
$$b = 1/\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 46 \end{bmatrix}\right)\det\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 35 \end{bmatrix} = 44/40 = 11/10.$$

Approximationen av experimentella data är då $y = -13/10 + 11/10x$.■



9. **Sats.**

Formulera och bevisa integralkalkylens huvudsats (Newton-Leibnitz sats). **(6p)**

Integralkalkylens huvudsats, eller Newton-Leibnitz satsen. (Theorem 5 , sid. 313 i Adams)

Låt f vara en kontinuerlig funktion på ett intervall I som innehåller en punkt a

Del 1. Låt F vara en funktion definierad på I med

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds \tag{1}$$

Då är F en deriverbar funktion på I och dess derivata i punkten x är lika med $f(x)$ - värdet av funktionen under integralen i punkten x:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{2}$$

Del 2.

Låt G vara en vilken primitiv funktion som helst till f så att $\frac{d}{dx}G(x) = f(x)$ på I.

Då gäller

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

för alla $b \in I$.

□

Bevis till Integralkalkylens huvudsats, eller Newton-Leibnitz satsen.

Vi bevisar först Del 1 och använder derivatans definition först och Medelvärdessatsen för integraler sedan .

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}F(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \\
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h\, f(c)\right)
\end{aligned}$$

Där $c = c(h)$ är en punkt som ligger mellan x och $x+h$, och är beroende av h. Observera att h i täljaren och nämnaren kancellerar. Lägg märke till att $\lim_{h\to 0} c(h) = x$ enligt "satsen om två polismännen". Dessa två observationer och det att f är kontinuerlig, leder till slutsatsen:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to 0} f(c(h)) = f(x)$$

Vi bevisar nu Del 2 i satsen.

Det att $\frac{d}{dx}G(x) = f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ medför att $F(x) = G(x) + C$ för någon konstant C, eftersom funktionen $F(x) - G(x)$ har derivatan noll och måste vara konstant. Detta medför att

$$\int_a^x f(s)ds = F(x) = G(x) + C$$

Med att sätta $x = a$ i formeln för integralen får vi $0 = G(a) + C$ och $C = -G(a)$. Sätt nu $x = b$ och får

$$\int_a^b f(s)ds = G(b) + C = G(b) - G(a)$$

■

Maxpoäng på tentan är 50.

Betyggränser för poäng på tentamen, inklusive eventuella bonuspoäng är: **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40