Samling av bevis som krävs på tentan MVE465, 2018

Medelvärdessatsen för integraler. Det är Theorem 4, på sid. 310 i Adams. Lecture_1_1, sid. 7-8

Om f är en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$, så finns det en punkt $c \in [a, b]$ sådan att

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

□

Beviset till Medelvärdessatsen för integraler.

Det att funktionen f är kontinuerlig på ett begränsat slutet interval medfär att den antar sitt maximala värde $\max_{x\in[a,b]} f(x) = M = f(u)$ och minimala värdet $\min_{x\in[a,b]} f(x) = m = f(l)$ i några munkter u och l ur $[a, b]$ så att

$$m = f(l) \leq f(x) \leq f(u) = M \tag{1}$$

för alla x på $[a, b]$.

En av egenskaper hos bestämda integralen medför att om för två kontinuerliga funktioner g och p gäller att

$$g(x) \leq p(x)$$

för alla $x \in [a, b]$ så måste

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b p(x)dx$$

Vi tillämpar den egenskap till olikheten (1) och får

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

Dela vänster och höger av den olikheten med $(b-a)$ och få

$$m = f(l) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(u) = M$$

Vi observerar nu att talet $\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)$ ligger mellan två värden $f(l)$ och $f(u)$ av kontinuerliga funktionen f på ett intervall. Enligt satsen om mellanliggande värden av kontinuerliga funktioner måste finnas en punkt c mellan punkterna l och u sådan att $f(c)$ är lika med detta mellanliggande talet:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Sista relationen medför efter multiplikation med $(b-a)$ påståendet i satsen:

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)dx$$

■

Definition. Värdet

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

kallas medelvärdet av funktionen f på intervallet $[a, b]$.

Vi formulerar igen och ger bevis till

Integralkalkylens huvudsats, eller Newton-Leibnitz satsen. (Theorem 5 , sid. 313 i Adams) Lecture_1_1, sid. 8-9.

Låt f vara en kontinuerlig funktion på ett intervall I som innehåller en punkt a

Del 1. Låt F vara en funktion definierad på I med

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds \tag{2}$$

Då är F en deriverbar funktion på I och att dess derivata i punkten x är lika med $f(x)$ - värdet av funktionen under integralen i punkten x:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{3}$$

Del 2.

Låt G vare en vilken primitiv funktion som helst till f så att $\frac{d}{dx}G(x) = f(x)$ på I.

Då gäller

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{4}$$

för alla $b \in I$.

□

Bevis till Integralkalkylens huvudsats, eller Newton-Leibnitz satsen.

Vi bevisar först Del 1 och använder derivatans definition först och Medelvärdessatsen för integraler sedan .

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}F(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \\
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)dx &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} (h\, f(c))
\end{aligned}$$

Där $c = c(h)$ är en punkt som ligger mellan x och $x + h$, och är beroende av h. Observerar att h i täljaren och nämnaren kancellerar. Lägg märke till att $\lim_{h\to 0} c(h) = x$ enligt "satsen om två polismännen". Dessa två observationer och det att f är kontinuerlig leder till slutsatsen:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to 0} f(c(h)) = f(x)$$

Vi bevisar nu Del 2 i satsen.

Det att $\frac{d}{dx}G(x) = f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ medför att $F(x) = G(x) + C$ för någon konstant C, eftersom funktionen $F(x) - G(x)$ har derivatan noll och måste vara konstant. Detta medför att

$$\int_a^x f(s)ds = F(x) = G(x) + C$$

Med att sätta $x = a$ i formeln för integralen får vi $0 = G(a) + C$ och $C = -G(a)$. Sätt nu $x = b$ och får

$$\int_a^b f(s)ds = G(b) + C = G(b) - G(a)$$

■

Variabelsubstitution i bestämd integral. Sats 6, sid. 322. Lecture 1_2 sid. 3-4

Låt g vara deriverbar funktion med kontinuerlig derivatan och låt f vara en kontinuerlig funktion på värdesmängden av g (det är mängden V av alla tal u på formen $u = g(x)$ med $x \in [a, b]$). Då

$$\int_a^b f(g(x)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \tag{5}$$

I fall vi kan en primitiv funktion F till f, kan svaret skrivas explicit:

$$\int_a^b f(g(x)g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a)) \tag{6}$$

□

Bevis.

Låt F vara primitiv funktion (obestämd integral) till f: $F'(u) = f(u)$ för alla $u \in V$. Kedjeregeln medför att

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Integrationen av vänsterledet och högerledet från a till b medför

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_a^b \left[\frac{d}{dx}F(g(x))\right] dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

■

Satsen om 4 ekvivalenta kriterier för existensen av lösningar för alla högerled. Sats 1.4.4 i Lay, s. 53, bevis s. 56. Lecture 3_3 sid. 6.

Nästa sats ger 4 ekvivalenta kriterier för lösbarheten av ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Låt A vara en $m \times n$ matrix. Följande påståenden är ekvivalenta, d.v.s gäller eller inte gäller bara samtidigt.

a. För varje $b \in R^m$ finns en lösning till ekvationen $Ax = b$.

b. varje $b \in R^m$ är linjär kombination av kolonner i A

c. Spannet av kolonner ur A utgör hela R^m,eller Span $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\} = \mathbb{R}^m$.

d. matrisen A har ett pivot element i varje rad.

$\square$

Bevis - är en övning på att komma ihåg Gauss elimination och definitioner på linjär kombination, spannet och matris-vektor produkt.

Bevis

Påståenden (a), (b), (c) är ekvivalenta enligt definition av matris vektor produkt, linjär kombination och spannet av vektorer. Det räcker då att bevisa att d. är ekvivalent med a.

Låt U vara trappstegsmatris som fås från A med hjälp av Gauss elimination. Trappstegsmatrisen som svarar mot utvidgade matrisen $[A, \mathbf{b}]$ har formen $[U, \mathbf{d}]$ med någon kolonn $\mathbf{d}$ som är resultat av Gauss elimination tillämpad på högerledet $\mathbf{b}$ i ursprungliga matrisen $[A, \mathbf{b}]$:

$$[A, \mathbf{b}] \curvearrowright \overset{Gauss}{\cdots} \curvearrowright [U, \mathbf{d}]$$

I fall då (d) gäller och A har en pivot position i varje rad, kan $[U, \mathbf{d}]$ se ut som följande matris:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * & ... & * & * & d_1 \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & ... & * & * & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & ... & * & * & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & ... & * & * & d_4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \blacksquare & * & d_m \end{bmatrix}$$

Detta medför att systemet har några lösningar för varje högerled och (a) gäller.

Om (d) är fel, så innehåller åtminstone sista raden i U bara nollor. Det är eftersom man flyttar alla nollrader neråt vid Gauss elimination. Vi väljer ett högerled $\mathbf{d}$ i transformerade systemet $U\mathbf{x} = \mathbf{d}$ med utvidgade trappstegsmatrisen $[U, \mathbf{d}]$ som har 1 i $\mathbf{d}$ i sista raden:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * & ... & * & * & d_1 \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & ... & * & * & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & ... & * & * & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & ... & * & * & d_4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I det fallet får vi ett system $U\mathbf{x} = \mathbf{d}$ där sista ekvationen som svarar sista radet i $[U, \mathbf{d}]$ är olösbart: $0 = 1$.

Ursprungliga systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är naturligtvist också olösbart i det fallet eftersom de är ekvivalenta. Detta visar att (a) och (d) är ekvivalenta: de gäller bara samtidigt.$\blacksquare$

Beskrivningen av lösningar till inhomogena linjära system ekvationer. Sats 1.5.6 i Lay, sid. 63. Lecture 3_3, sid. 10-11

Låt ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vara lösbart för någon vektor $\mathbf{b}$ och vektor $\mathbf{p}$ vara en godtycklig partikulär lösning.

Då är lösningsmängden till den ekvationen består av alla vektorer på formen $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ där $\mathbf{v}_h$ representerar alla lösningar till homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bevis. (Exercise 25 i sektionen)

Låt $\mathbf{w}$ vara en godtycklig lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Definiera $\mathbf{v}_h = \mathbf{w} - \mathbf{p}$. Två ekvationer är uppfylda: $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ och $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$.

Med att subtrahera dem från varandra observera att $A(\mathbf{w} - \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ och då $A\mathbf{v}_h = 0$. Det visar att alla lösningar till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har formen $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ där $\mathbf{p}$ är en godtycklig partikulär lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{v}_h$ är en lösning till homogena ekvationen $A\mathbf{x} = 0$. Vi har visat att vilken som helst lösning $\mathbf{w}$ kan representeras som summan $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ ovan.

Å andra sidan, om vi tar en vektor som har den formen: $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ där $\mathbf{p}$ är en partikulär lösning, d.v.s. $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{v}_h$ uppfyller linjära systemet $A\mathbf{v}_h$ =0, då måste $\mathbf{w}$ uppfylla inhomogena ekvationen eftersom $A\mathbf{w} = A\mathbf{p} + A\mathbf{v}_h = \mathbf{b} + 0 = \mathbf{b}$.

$\blacksquare$

Satsen om standartmatris till en linjär transformation (avbildning) Sats 1.9.10, sid. 88 i Lay, Lecture_4_3, sid. 3-4.

Låt T vara en linjär transformation (avbildning) från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$($T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$).

Då finns en unique matris A sådan att avbildningen framställs som matristransformation med den matrisen:

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

för alla $\mathbf{x}$ ur $\mathbb{R}^n$. Matrisen A kan framställas som $m \times n$ matris på formen

$$A = [T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ...\mathbf{e}_n,)]$$

där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ...\mathbf{e}_n$ är kolonnerna i enhetsmatrisen I_n av storlek $n \times n$ som har ettor på diagonalen och nollo på alla andra platser:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrisen A här kallas **standartmatrisen av linjära transformationen** T.

Bevis. (kan krävas på tentan)

Framställ en godtycklig vektor $\mathbf{x}$ som

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix} + ... + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n \end{aligned}$$

beräkna $T(\mathbf{x})$ på det uttrycket och använd Ts linjäritet:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) + \ldots + x_n T(\mathbf{e}_n) = \\ &= [T(\mathbf{e}_1)\, T(\mathbf{e}_2) \ldots T(\mathbf{e}_n)]\, \mathbf{x} = A\mathbf{x} \end{aligned}$$

Vi har bevisat framställningen av godtyckliga linjära transformationen T som matristransformation: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Entydigheten av standarta matrisen bevisas med hjälp av följande observation. Låt finnas en annan standart matris B till samma transformation. Vi skall visa att A och B måste vara lika.

För alla vektorer $\mathbf{x}$ ur $\mathbb{R}^n$ gäller att

$$A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$$

Speciellt gäller detta för vektorer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n$. Å andra sidan är det lätt att observera att $A\mathbf{e}_j$ är kolonnen med nummer j i A.På samma sätt är $B\mathbf{e}_j$ kolonnen med nummer j i B och $A\mathbf{e}_j = B\mathbf{e}_j$ för alla $j = 1, \ldots n$, d.v.s. alla kolonner i A och B är lika och då $A = B$.

■

Satsen om algebraiska regler för matrisprodukt (Lay Sats 2.1.2, sid. 115) Lecture_4_1, sid. 6.

Låt A vara en $m \times n$ matris och matriser B och C ha storlekar sådana att produkter och summor i formler som följer är väldefinierade.

$$\begin{aligned} a) \quad A(BC) &= (AB)C \\ b) \quad A(B+C) &= AB + AC \\ c) \quad (B+C)A &= BA + CA \\ d) \quad r(AB) &= (rA)B = A(rB) \\ e) \quad I_m A &= A = AI_n \end{aligned}$$

där r är ett godtyckligt tal, och I_n är en kvadratisk $n \times n$ matris som har 1 på diagonalen och alla andra elementen lika med noll.

Definition.

Kvadratisk matris I_n storlek n som har egenskapen e) ovan kallas enhetsmatris. Den har ettor på diagonalen och nollor på alla andra platser.

□av

Till exempel $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bevis till Satsen 2.1.2

Endast intressant är beviset till a) (beviset kan krävas på tentan)

Låt $C = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_p]$. Definitionen av matrisprodukten ger

$$\begin{aligned} BC &= [B\mathbf{c}_1, B\mathbf{c}_2, \ldots, B\mathbf{c}_p] \\ A(BC) &= [A(B\mathbf{c}_1), A(B\mathbf{c}_2), \ldots, A(B\mathbf{c}_p)] \end{aligned}$$

Definitionen på matrisprodukten medför att $A(Bx) \overset{\text{def}}{=} (AB)x$. Detta tillämpad till alla $A(B\mathbf{c}_1), A(B\mathbf{c}_2), ..., A(B\mathbf{c}_p)$ ger attdel aaa

$$A(BC) = [(AB)\,\mathbf{c}_1, (AB)\,\mathbf{c}_2, ..., (AB)\,\mathbf{c}_p] \overset{\text{def}}{=} (AB)\,C$$

där sista likheten följer från definitionen av matrisprodukt.■

Satsen om beräkningar med inversa matriser. Sats 2.2.6, sid. 123 i Lay. Lecture 5_1, sid. 4.

Låt A och B vara inverterbar matris $n \times n$. Följande tre algebraiska formler gäller

a)

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

b) produkt AB av två inverterbara matriser A och B är också inverterbar matris och

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Bevis till detta påstående kan krävas på tentan

c) A^T - transponatmatris av en inverterbar matris A är också inverterbar och

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Bevis. till b) som kan krävas på tentan.

Beräkna produkt av AB med "mistänkta inversen" $B^{-1}A^{-1}$(visar att den är vänster invers)

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}(I)\,B = B^{-1}B = I$$

Beräkna produkt av AB med "mistänkta inversen" $B^{-1}A^{-1}$ i motsatta ordningen (visa att den är höger invers):

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = A\,(I)\,A^{-1} = AA^{-1} = I$$

■

En matris är inverterbar och om endast om den är radekvivalent med en enhetsmatris. Sats 2.2.7, s. 125. i Lay som krävs med bevis på tentan. Lecture_5_1, sid. 8.

Matrisen A av storlek $n \times n$ är inverterbar om och endast om den är radekvivalent med enhetsmatrisen (identitetsmatrisen) av samma storlek.

Bevis. Man kan lära beviset med hjälp av elementära matriser i Lay. Vi anger här en kortare bevis som inte använder begreppet elementära matriser.

Om A är radekvivalent med en enhetsmatris, så har systemet $A\mathbf{b} = \mathbf{p}$ en entydig lösning för vilket som helst högerled $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Följaktligen har matrisekvationen

$$AB = I$$

en entydig lösning, med kolonner i B som är entydiga lösningar till ekvationer $A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k, k = 1, ...n$.

Matrisen B är då högerinvers till A . Det är påståendet j) i Inversamatrissatsen. Vi skall visa att detta medför inverterbarheten av A.

Vårt resonemang är baserat på tidigare bevisat egenskap att A och A^T är inverterbara bara samtidigt.

Betrakta transponat av ekvationen $AB = I$:

$$(AB)^T = I^T$$

Detta medför enligt regler för transponat av produkt att

$$B^T A^T = I^T = I.$$

Det betyder att B^T är vänster invers till A^T(!!!)

Observera här att vänsterinvers är mycket lämpligare än högerinvers. Det är lätt att se att vänsterinversen B^T till A^T måste samtidigt vara högerinvers till A^T eftersom ekvationen

$$A^T Q = I$$

för högerinvers Q löses genom vänstermultiplikation med B^T och har en lösning

$$\begin{aligned} Q &= B^T \\ A^T B^T &= I \end{aligned}$$

Så matrisen A^T är inverterbar och $\left(A^T\right)^{-1} = B^T$.

Men matrisen A som är transponat av A^T och måste också vara inverterbar, och $A^{-1} = B$ enligt satsen om beräkningsregler för inversa matriser.

Beviset åt motsatt håll är mycket lättare. Om matrisen A är inverterbar så har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$ en entydig lösning $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{p}$ för godtycklig högerled $\mathbf{p}$. Det är möjligt bara om matrisen A är radekvivalent med enhetsmatrisen I enligt tidigare utvecklad teori för linjära ekvationssystem.

■

Huvudsatsen om diagonaliserbara matriser. Sats 5.3.5., s. 300 i Lay, Lecture_6_1, sid. 3.

Sats 5.3.5 , sid., 300 i Lay.

En kvadratisk $n \times n$ matris A är diagonaliserbar om och endast om $\Longleftrightarrow$ den har n linjärt oberoende egenvektorer.

I det fallet $A = PDP^{-1}$ där matrisen P har kolonner som är n linjärt oberoende egenvektorer till A och diagonala matrisen D med diagonala element som är egenvärden som svarar mot dessa egenvektorer (i samma ordning som i P).

$\square$

Bevis. (krävs på tentan)

Vi visar först implikationen från höger till vänster $\Longleftarrow$.

Låt $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_n\} \in \mathbb{R}^n$ vara n linjärt oberoende egenvektorer till matrisen A och $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n\}$ vara motsvarande egenvärden (kanske en del multipla).

Bygg en matris P med kolonner som är dessa vektorer:

$$P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_n]$$

och en diagonal matris med egenvärden $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n\}$ på diagonalen, i samma ordning som egenvektorerna som hör till dem var satta i matrisen P. (Vi kan sätta dem i vilken som helst ordning)

Egenvektorer satisfierar ekvationer

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k, \qquad k = 1, ..., n$$

Vi kan skriva om dessa ekvationer som en matrisekvation

$$[A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, ..., A\mathbf{v}_n] = [\lambda_1\mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2, ..., \lambda_n\mathbf{v}_n]$$

som är enligt definitionen av matrisprodukten är samma som

$$AP = PD$$

Låt oss visa att verkligen $PD = [\lambda_1\mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2, ..., \lambda_n\mathbf{v}_n]$. Kolla elementet c_{rk} i produkten PD, som ligger i raden r och i kolonnen k. Rad-kolonn regeln för matrisprodukt säger att c_{rk} måste vara lika med summan av elementvisa produkter av raden med nummer r ur P : $[P_{r1}, P_{r2}, ..., P_{rn}]$ och kolonnen med nummer k ur D : $[D_{1k}, D_{2k}, ..., D_{nk}]^T$.

Observera att $[D_{1k}, D_{2k}, ..., D_{nk}]^T$ har bara ett element som inte är noll: $D_{kk} = \lambda_k$. Detta medför att $c_{rk} = \lambda_k P_{rk}$ för alla $r = 1, ..., n$. Det betyder att kolonnen med nummer k i PD är kolonnen med nummer k ur P, multiplicerad med λ_k. Det är exakt meningen med $[\lambda_1\mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2, ..., \lambda_n\mathbf{v}_n]$.

Matrisen P är inverterbar eftersom dess kolonner är linjärt oberoende. Vi multiplicerar sista ekvationen från vänster med P^{-1} och ser att A är diagonaliserbar:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= D \\ A &= PDP^{-1} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Implikationen från vänster till höger $\Longrightarrow$ följer från samma beräkning men genomförd åt motsatt håll.

Låt matrisen A vara diagonaliserbar: $A = PDP^{-1}$ och betekna lnjärt oberoende kolonner i P med $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_n\}$ och diagonalelementen i diagonalmatrisen D med $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n\}$. Multiplicera ekvationen $A = PDP^{-1}$ med P från höger:

$$AP = PD$$

som kan skrivas om med att specificiera kolonner i matriser AP och DP i sista ekvationen:

$$AP = [A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, ..., A\mathbf{v}_n] =$$

$$PD = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 \mathbf{v}_1, \lambda_2 \mathbf{v}_2, ..., \lambda_n \mathbf{v}_n]$$

Med att identifiera ekvationer för kolonner i dessa matriser ser vi att

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k, \qquad k = 1, ..., n$$

och att linjärt oberoende vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, , ..., \mathbf{v}_n\}$ är egenvektorer till matrisen A med egenvärden $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n\}$.

■

Satsen om bas av ortogonala vektorer. Sats 6.2.4, sid. 356. (bevis krävs på tentan) Lecture_6_2, sid. 5.

Låt $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_p\}$ vara en ortogonal uppsättning vektorer skillda från noll i $\mathbb{R}^n$.

Den uppsättningen är **linjärt oberoende och utgör en bas till spannet Span**$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_p)$ **av dessa vektorer.**

Bevis. (bevis krävs på tentan)

Betrakta en linjär kombination av givna uppsättningen vektorer lika med noll:

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + ... + c_p\mathbf{u}_p = 0$$

Skalär produkt av den lijära kombinationen med en godtycklig vektor $\mathbf{u}_k$ ur den uppsättningen är like med noll och

$$c_1\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_k + c_2\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_k + ...c_k\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k + ... + c_p\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_k = 0$$

Alla skalära produkter i den summan är noll förutom .$\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k = \|\mathbf{u}_k\|^2 \neq 0$. Detta medför att

$$c_k \|\mathbf{u}_k\|^2 = 0$$

och $c_k = 0$, för alla $k = 1, ..., p$ och att vektorer $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_p\}$ är linjärt oberoende per definition.

■