Dugga om Linär algebra. Lösningar till variant 1.

1. Beräkna dimensionen och ange bas för spannet av vektorer:
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

Lösning. Beteckna givna vektorer med $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$. Spannet av dessa vektorer är mängden av alla linjära kombinationer

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 + x_4\mathbf{b}_4$$

som per definition är lika med matris-vektor produkt

$$B\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 + x_4\mathbf{b}_4$$

där matrisen B har kolonner $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$ och kolonnvektorn $\mathbf{x}$ har komponenter x_1, x_2, x_3, x_4.

Spannet Span($\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$) av givna vektorer är samma som kolonnrummet av matrisen B. En möjlig bas till kolonnrummet till B består av pivotkolonner i matrisen B. De bestämmas genom Gausselimination på matrisen B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 9 & -6 & -3 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright}$$

$$\overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att pivotkolonner är två första kolonner $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ i matrisen B. De utgör en bas till kolonnrummet och till spannet (Span $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$) av vektorer $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$.

Dimensionen av spannet är $\dim(\text{Span}\,\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}) = 2$.

2. Bestäm standartmatrisen av transformationen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som först speglar vektorer i planet med avseende på linjen $y = -x$ och sedan roterar dem i vinkel 45 grader moturs. Är den transformationen bijektiv?

Lösning. Standartmatrisen A till en linjär transformation $T(x)$ är en matris sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Den har kolonner $T(\mathbf{e}_1)$ och $T(\mathbf{e}_2)$ där $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är standarta basvektorer i planet $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Spegling av $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ med avseende på linjen $y = -x$ ger vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Rotattion nen av den vektorn i 45 grader ($\pi/4$ radianer) moturs ger vektorn $\begin{bmatrix} \cos(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$. Sista vektorn är $T(\mathbf{e}_1)$ och första kolonnen i A.

Spegling av $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ med avseende på linjen $y = -x$ ger vektorn $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Rotattionen av den vektorn i 45 grader ($\pi/4$ radianer) moturs ger vektorn $\begin{bmatrix} -\cos(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$. Sista vektorn är $T(\mathbf{e}_2)$ och andra kolonnen i A.

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Transformationen T är bijektiv och inverterbar eftersom både spegling och rotation är inverterbara. Man kan också se detta med att analysera standarta matrisen A :

a) observera att kolonnerna i A är linjärt oberoende: två ickeparallella vektorer i planet, eller

b) observera att A har två pivotkolonner genom att göra ett steg i Gauss elimination: addera första raden till andra.

b) med att beräkna determinant av A: $\det(A) = -1 \neq 0$

■

3. Beräkna egenvärden och så många som möjligt linjärt oberoende egenvektorer till matrisen A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösning. Vi beräknar först karakteristiska polynomet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)$

Vi använder sista kolonnen med 2 nollor för att beräkna determinanten på enklaste möjliga sättet och samtidigt få ett av egenvärden nästan gratis.

$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (2-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) = (2-\lambda)^3$ Vi får ett egenvärde $\lambda = 2$ med multiplicitet 3.

Egenvektorer $\mathbf{x}$ som svarar egenvärdet $\lambda = 2$ uppfyller homogena ekvationen

$$(A - 2I)\mathbf{x} = 0$$

Vi genomför Gausselimination på matrisen $(A - 2I)$:

$\begin{bmatrix} 1-2 & 1 & 0 \\ -1 & 3-2 & 0 \\ -1 & 1 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ eller $x_1 - x_2 = 0$.

Det finns två fria variabler x_2 och x_3 : $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Det finns två linjärt oberoende egenvektorer som kan väljas som $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_{2=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Varje uppgift ger 0.5 bonuspoäng till tentan och två omtentor innan nästa läsår.