Dugga om Linär algebra. Lösningar till variant 2

1. Beräkna dimensionen och ange en bas för kolonnrummet av matrisen A.Vad är dimensionen av nollrummet till A?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Lösning.

Kolonnrummet är spannet Span($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$) av kolonnvektorer i matrisen A. En möjlig bas av kolonnrummet till A består av pivotkolonner i matrisen A. De kan bestämmas genom Gausselimination på matrisen A.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -5 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -5 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright}$$

$$\overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -10 \\ 3 & 7 & -10 \\ 0 & 14 & -20 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Första och andra kolonner i A är pivot kolonner och utgör en bas till $Col(A)$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Dimensionen av $Col(A)$ är två. Dimensionen av nollrummet är lika med $3 - 2 = 1$ enligt ranksatsen. Alternativt ser vi efter Gauss eliminationen att det finns en frivariabel i homogena systemet $Ax = 0$ och det måste då ha bara en linjärt oberoende lösning. Det betyder också att nollrummet har dimension 1.

2. Bestäm standartmatrisen av transformationen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i planet som först projicerar vektorer på y axeln och sedan roterar dem i vinkel 45 grader medurs. Är den transformationen inverterbar?

Lösning. Standartmatrisen A till en linjär transformation $T(x)$ är en matris sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Den har kolonner $T(\mathbf{e}_1)$ och $T(\mathbf{e}_2)$

där $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är standarta basvektorer i planet $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Projektionen av $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ på y -axeln ger vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.Rotationen lämnar den kvar. $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Projektionen av $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ på y -axeln ger vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.Rotationen av vektorn i vinkel 45 grader medurs ger vektorn $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Transformationen T saknar invers eftersom alla punkter $\mathbf{x}$ som ligger på någon linje parallell med x - axeln avbildas i samma punkt på linjen $y = x$. Alternativt är det lätt att se att standarta matrisen A har en kolonn av nollor och saknar invers eftersom det finns bara en linjärt oberoende kolonn i matrisen. Dess determinant $\det(A) = 0$ är noll som också medför att A saknar invers. ■

3. Beräkna egenvärden bestäm antalet linjärt oberoende egenvektorer som finns hos matrisen A.
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Lösning. Vi beräknar först karakteristiska polynomet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$

Vi använder sista kolonnen med 2 nollor för att beräkna determinanten på enklaste möjliga sätt och samtidigt få ett av egenvärden nästan gratis.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 3\right)$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3)\,.$$

Vi fick tre olika egenvärden $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$, som måste ha tre linjärt oberoende egenvektorer. Det räcker med det svaret.

Linjärt oberoende egenvektorer uppfyller följande tre homogena ekvationssystem: $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = 0$; $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = 0$; $(A - \lambda_3 I)\mathbf{v}_3 = 0$.

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{eller } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$(A - \lambda_3 I) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{eller } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Varje uppgift ger 0.5 bonuspoäng till tentan och två omtentor innan nästa läsår.